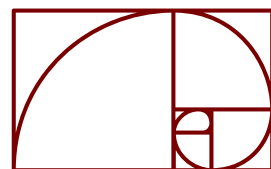
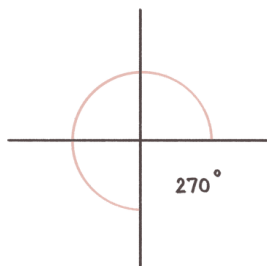
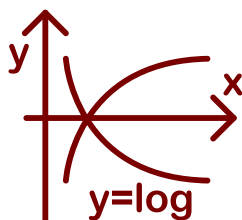
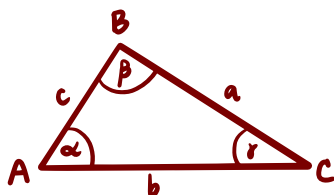
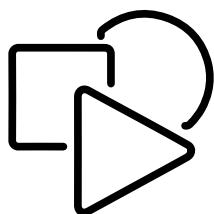


MATEMATIKA

2. ročník

PRACOVNÍ SEŠIT



JMÉNO:
TŘÍDA:
ŠKOLNÍ ROK:

Planimetrie

Základní pojmy:

- Planimetrie je část geometrie
 - (sleduje geometrické útvary v rovině)

- **BOD**

- Označení: _____

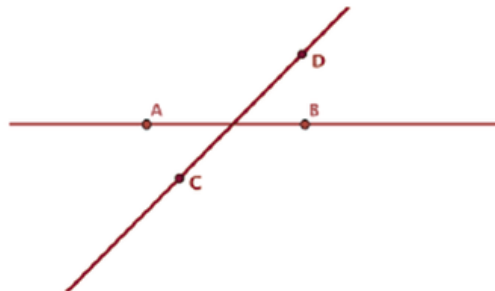
- **PŘÍMKA**

- Označení: _____
 - Vzájemné polohy přímek v rovině:

- **Totožné:** _____



- **Různoběžné:** _____



- **Rovnoběžné:** _____



- **POLOPŘÍMKA**

- Označení: $\rightarrow PA$ (P je počáteční bod a A je bod na přímce, co na ní leží)



- **ÚSEČKA**

- Označení: $|AB|$
 - A a B jsou krajní body úsečky

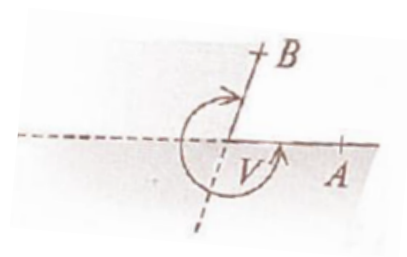
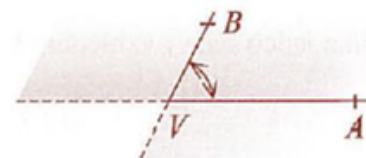


ÚHEL

○ Označení: _____

• Konvexní úhel: _____

• Konkávní úhel: _____

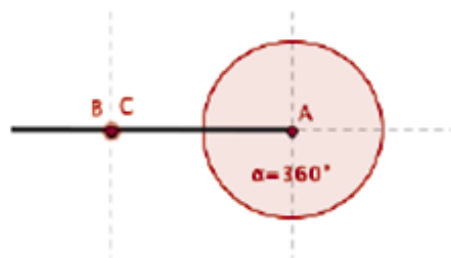
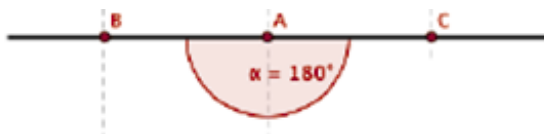
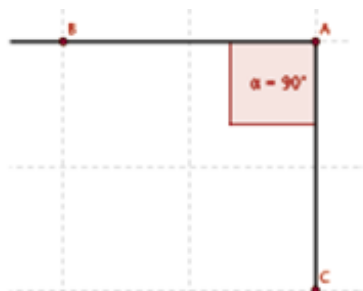


Typy úhlů:

• Pravý úhel: _____

• Přímý úhel: _____

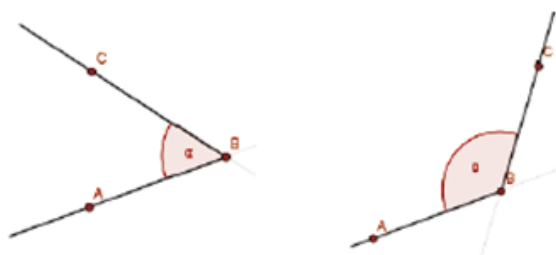
• Plný úhel: _____



Velikost úhlů:

• Ostrý úhel: _____

• Tupý úhel: _____

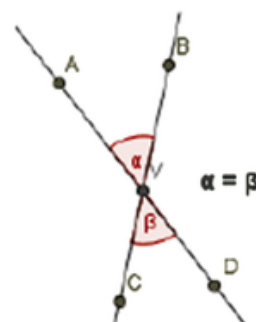


Dvojice úhlů:

• Vrcholový úhel

○ _____

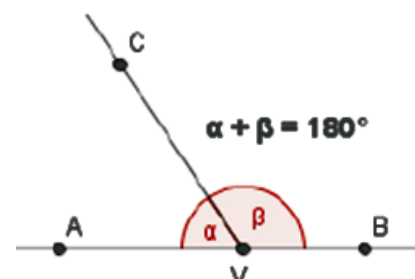
○ _____



• Vedlejší úhel

○ _____

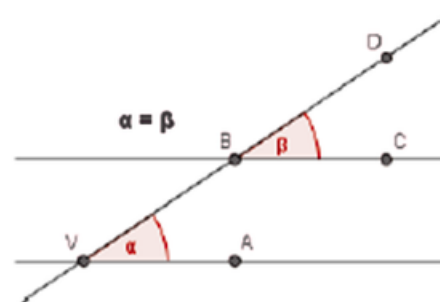
○ _____



• Souhlasné úhly

○ _____

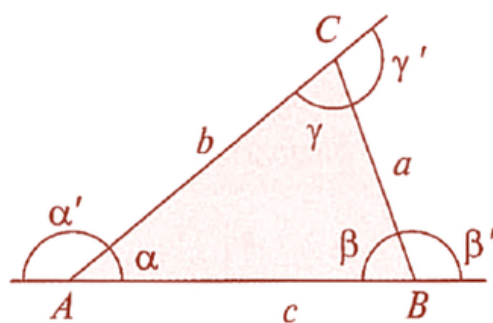
○ _____



TROJÚHELNÍK

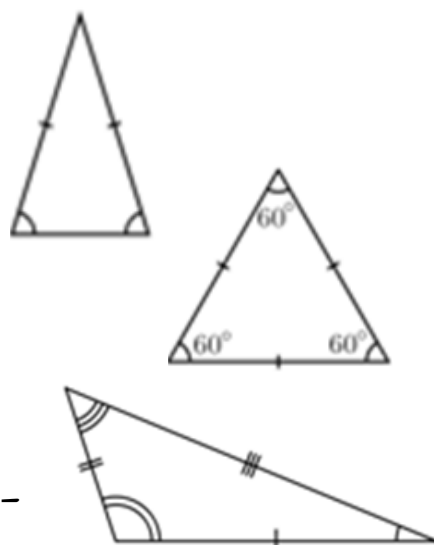
Trojúhelník ABC

- Vrcholy: -----
- Strany: -----
- Vnitřní úhly: -----
- Vnější úhly: -----
- Součet vnitřních úhlů: -----



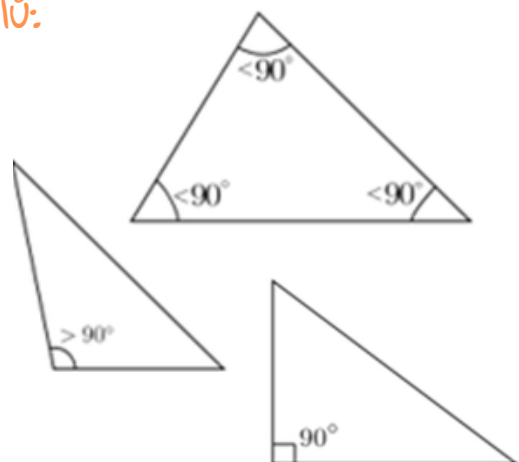
Typy trojúhelníků dle stran:

- Rovnoramenný
 - Má dvě strany -----
 - Stejně dlouhé strany = -----
 - Třetí strana = -----
- Rovnostranný
 - Má všechny tři strany -----
- Různostranný (obecný)
 - Všechny strany jsou -----



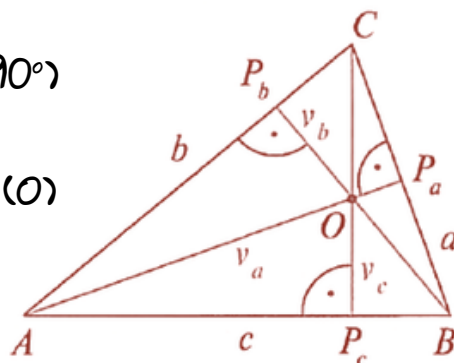
Typy trojúhelníků podle velikostí vnitřních úhlů:

- Ostroúhlý
 - Všechny vnitřní úhly jsou -----
- Tupoúhlý
 - Jeden vnitřní úhel je -----
- Pravoúhlý
 - Jeden vnitřní úhel je -----



Výška trojúhelníku:

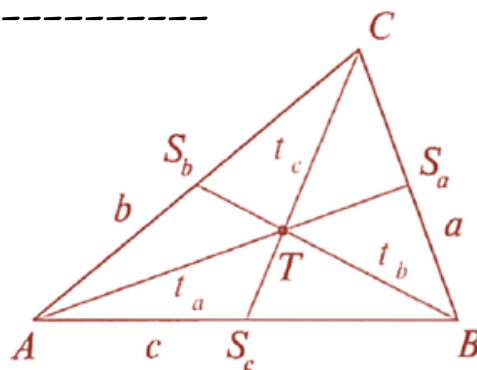
- Úsečka, kde krajní body jsou vrchol trojúhelníku (A) a pata kolmice (P_a)
- Úsečka svírá s kolmicí pravý úhel (90°)
- Označení: v_a, v_b, v_c
- Průsečík přímk = **ORTOCENTRUM** (O)



• Těžiště trojúhelníku

○

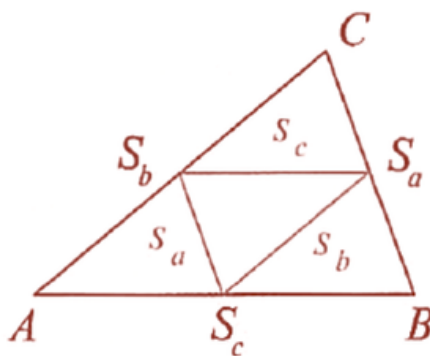
- Název: Těžnice
- Označení: t_a, t_b, t_c
- Těžnice protínají bod = **TĚŽIŠTĚ**
 - Označení: T



• Střední příčka trojúhelníků:

○

- Rovnoběžná s tou stranou trojúhelníku, jejíž střed nespojuje
- Její délka je rovna polovině délky této strany
- Označení: s_a, s_b, s_c

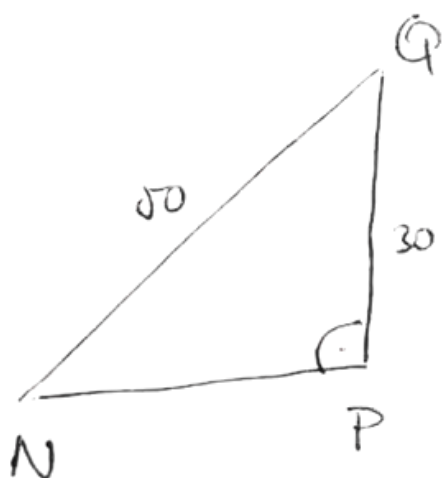
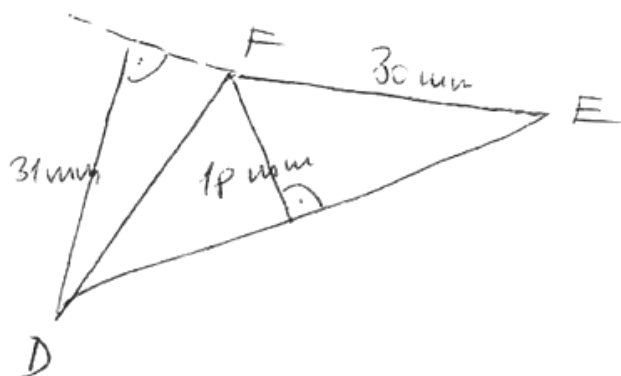
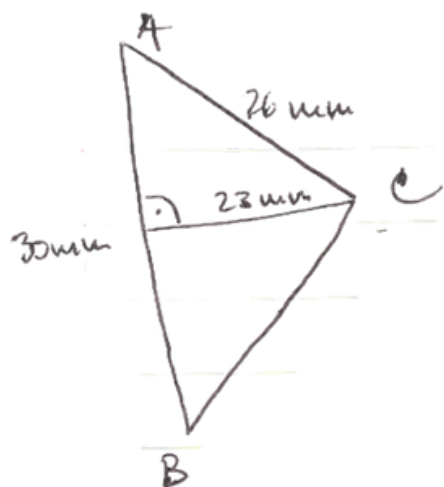


Základní vzorce pro trojúhelník:

- Obvod: $o = a + b + c$
- Obsah pravoúhlého trojúhelníku: $S = \frac{a \cdot b}{2}$
- Obsah obecného trojúhelníku: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$

Příklady na trojúhelník:

1) Vypočítejte obsah trojúhelníku:



2) Vypočítejte obvod trojúhelníku:

a) 15 cm, 2 dm a 0,1 m

b) rovnostranný Δ , jehož strana má délku $12\frac{2}{3}$

c) rovnoramenný Δ , jehož základna má délku 10 cm a rameno 150 mm.

d) pravoúhlý Δ , jehož odvěsny mají délky 6 cm a 8 cm.

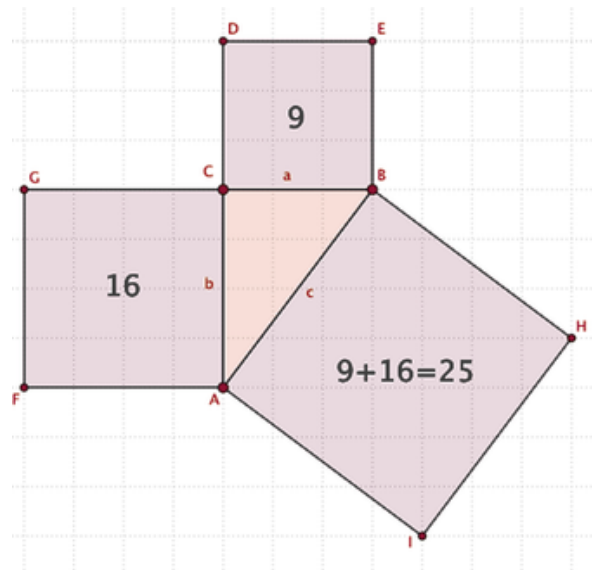
3) Vypočítejte výšku m , když obsah trojúhelníku je $57,4 \text{ cm}^2$ a délka strany m je 14 cm:



PÝTHAGOROVA VĚTA

V každém pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami a , b a přeponou c platí:

- Obsah čtverce na přeponou se rovná součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami
- $c^2 = a^2 + b^2$



Příklady na PV:

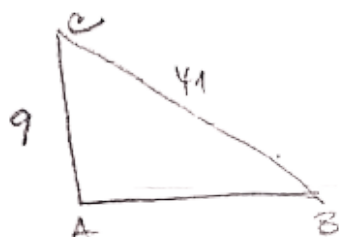
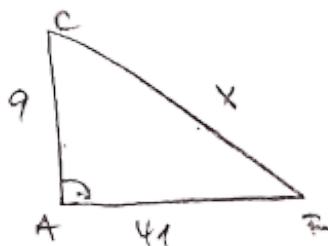
1) Zjistěte, zda Δ o stranách ----- jsou pravoúhlé:

a) 5, 12, 3

b) 6, 9, 11

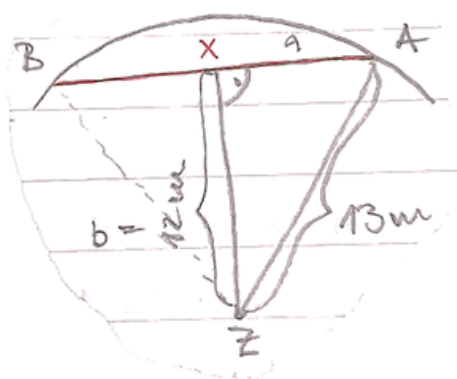
c) 5, 12, 13

- 2) V pravoúhlém Δ jsou známy velikosti 3 stran: $u = 9$ a $v = 41$.
Určete velikost zbývajících stran:



- 3) Z křižovatky dvou kolmých silnic vyjeli současně 2 cyklisté. První jel v průměru 16 km/h, druhý 20 km/hod. Jak byli daleko od sebe po 15 minutách?

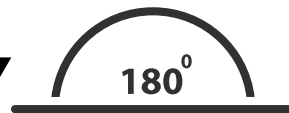
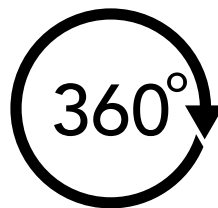
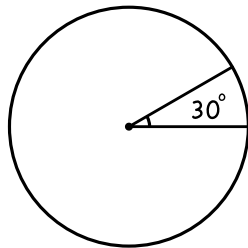
- 4) Zahradník kropí trávnik a stojí přitom ve vzdálenosti 12 m od přímé parkové cesty. Určete délku úseku na této cestě, kde mohou být návštěvníci pokropeni, může-li proud vody z hadice dosáhnout až do vzdálenosti až 13 m.



OPERACE S ÚHLY

Prozatím se budeme věnovat pouze úhlu stupňovému:

- **Stupeň:** 1°
 - $1/90$ pravého úhlu
- **Úhlová minuta:** $1'$
 - $1^\circ = 60'$
- **Úhlová sekunda:** $1''$
 - $1' = 60''$
 - $1^\circ = 60' = 3600''$
- Sčítání a odečítání stupňů:
 - v šedesátkové soustavě



Příklady na sčítání úhlů:

1) Sečtěte úhly: $\alpha = 183^\circ 51'$ a $\beta = 222^\circ 24'$

2) Sečtěte úhly: $\alpha = 55^\circ 48'$ a $\beta = 102^\circ 34'$

3) Odečtěte úhly: $\alpha = 222^\circ 24'$ a $\beta = 183^\circ 51'$

4) Odečtěte úhly: $\alpha = 102^\circ 34'$ a $\beta = 55^\circ 48'$

Převody mezi stupni a minutami:

Ze stupňů na minuty a sekundy

- Máme příklad ve tvaru:

$$58,125^\circ$$

- Nechám část, která je hotová $\rightarrow 58^\circ$
- Zabývám se částí, která je třeba převést $0,125^\circ$
 - toto číslo vynásobím 60

výjde celé číslo

- toto číslo je v minutách
- např. $58,2^\circ$
 - 58°
 - $0,2 \cdot 60 = 12'$
- Výsledek: $58^\circ 12'$

nevýjde celé číslo

- číslo před desetinnou čárkou je v minutách
- číslo za desetinnou čárkou je třeba znovu převést, tentokrát na sekundy

- toto číslo je v minutách
- např. $58,125^\circ$
 - 58°
 - $0,125 \cdot 60 = 7,5'$
- $0,5 \cdot 60 = 30''$
- Výsledek: $58^\circ 7' 30''$

Z minut na stupně

- Máme příklad ve tvaru:

$$105^\circ 52' 36''$$

- Příklad počítám od konce:
 - $36''$
 - toto číslo vydělím 60
 - $36'' : 60 = 0,6'$
- získané minuty se заданými sečtu: $0,6' + 52' = 52,6'$
- minuty převedu na stupně opětovným vydělením 60
 - $52,6' : 60 = 0,876666666666^\circ$
 - číslo zaokrouhlím na 2 desetinná místa a přičtu ke stávajícím stupňům:
 - $105^\circ + 0,88^\circ$
 - Výsledek: $105,88^\circ$

Příklady na převody úhlů:

1) Převeďte na stupně, minuty a popřípadě sekundy:

a) $5,4^\circ =$

b) $35,54^\circ =$

c) $54,65^\circ =$

d) $102,27^\circ =$

e) $115,82^\circ =$

f) $12,6^\circ =$

g) $126,37^\circ =$

2) Převeďte na celé stupně:

a) $100^\circ 8' 24'' =$

b) $200^\circ 10' 48'' =$

c) $88^\circ 9' =$

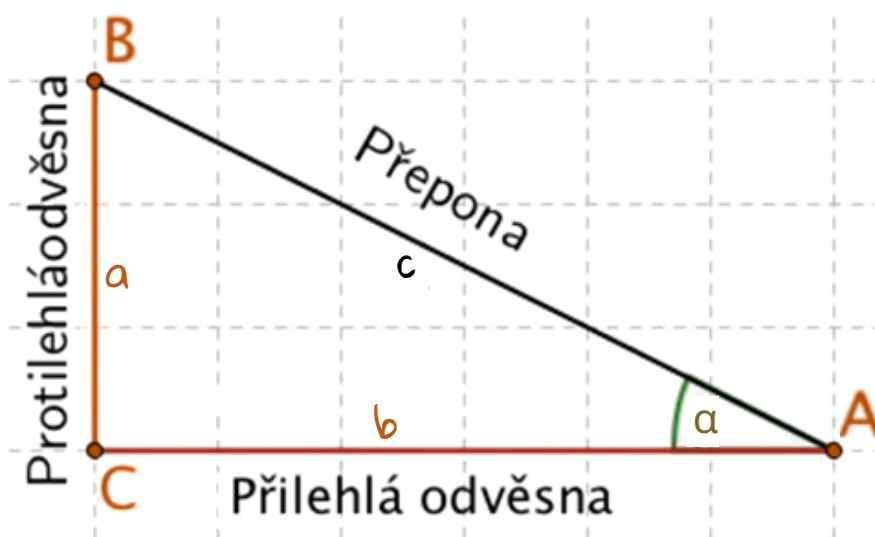
d) $12^\circ 27' =$

TRIGONOMETRIE PRAVOÚHLÉHO TROJÚHELNÍKU

- Zabývá se vztahy mezi délkami stran a úhly v trojúhelníku
- Budeme se zabývat jen úhly v trojúhelníku pravoúhlém

- **Pravoúhlý trojúhelník**

- Jedno rameno každého ostrého úhlu je _____, druhým ramenem je _____
 - Odvěsna ležící na ramenu ostrého úhlu je _____
 - Zbývající je _____



Základní vzorce :

- **Sinus α :** $\frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}}$
- **Kosinus α :** $\frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}}$
- **Tangens α :** $\frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}}$
- **Kotangens α :** $\frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}}$

Příklady na trigonometrii:

1) Vypočítejte velikosti zbývajících stran a úhlů pravoúhlého Δ , ve kterém je $\gamma = 90^\circ$ a kde:

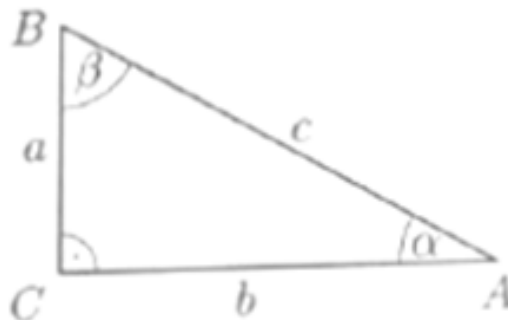
$$c = 120 \text{ cm}$$

$$\alpha = 50^\circ 20'$$

$$a = ?$$

$$b = ?$$

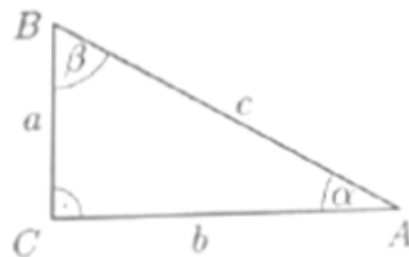
$$\beta = ?$$



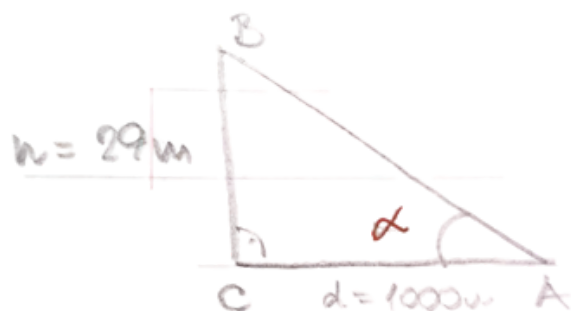
2) Vypočítejte úhly α a β v pravoúhlém Δ :

$$a = 8 \text{ cm}$$

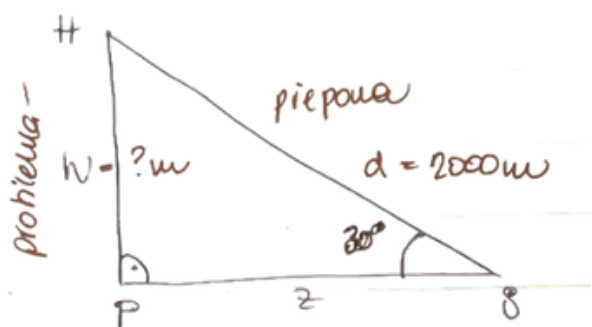
$$b = 6 \text{ cm}$$



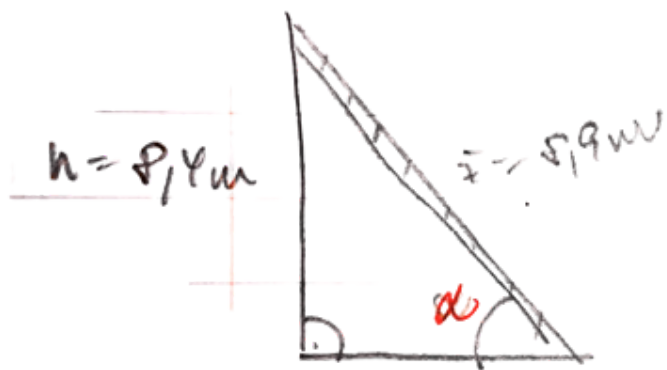
- 3) Trať má stoupání 29 promile. Tedy na délce 1000 m nastoupá 29 m. Jaký je úhel stoupání?



- 4) Chata se nachází na vrcholu hory. Ze startovní pozice je chata v úhlu 30° a přímá cesta k ní vede 2 km. V jaké výšce se chata nachází?



- 5) Jaký je sklon žebříku délky 8,9 m, který je svým horním okrajem opřen o kraj zdi vysoké 8,4 m?



- 6) Žebřík 8,5 m dlouhý je umístěn ve studni a svým dolním koncem vzdálen 0,9 m od stěny studně. Horní část žebříku je opřena o stěnu studny, Jak velký úhel svírá žebřík se dnem studny?

7) Jak je vysoká budova, která na vodorovnou dlažbu vrhá stín dlouhý 50,5 m pod úhlem $54^{\circ}21'$?

8) Dalekohled měřicího přístroje je 1,7m nad vodou a je vzdálen 105 m od paty komína. Vypočítejte výšku komína, jeli změřen výškový úhel $29^{\circ}22'$.

9) Pozorovatel P je na rozhledně ve výšce 150 m. Vidí loď pod úhlem 9° .
Jak daleko je od pozorovatele loď + jak daleko je loď od rozhledny?

PROCVIČOVÁNÍ K TESTU

1) Vypočítejte velikosti zbývajících stran a úhlů pravoúhlého Δ , ve kterém je $\gamma = 90^\circ$ a kde:

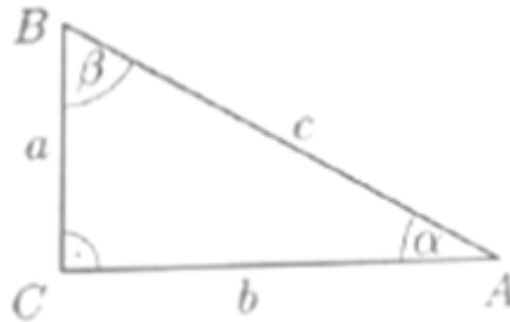
$$c = 95 \text{ cm}$$

$$\alpha = 48^\circ 42'$$

$$a = ?$$

$$b = ?$$

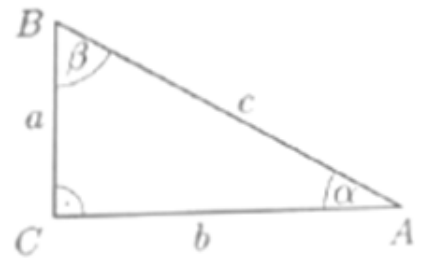
$$\beta = ?$$



2) Vypočítejte úhly α a β v pravoúhlém Δ :

$$a = 12 \text{ cm}$$

$$b = 15 \text{ cm}$$



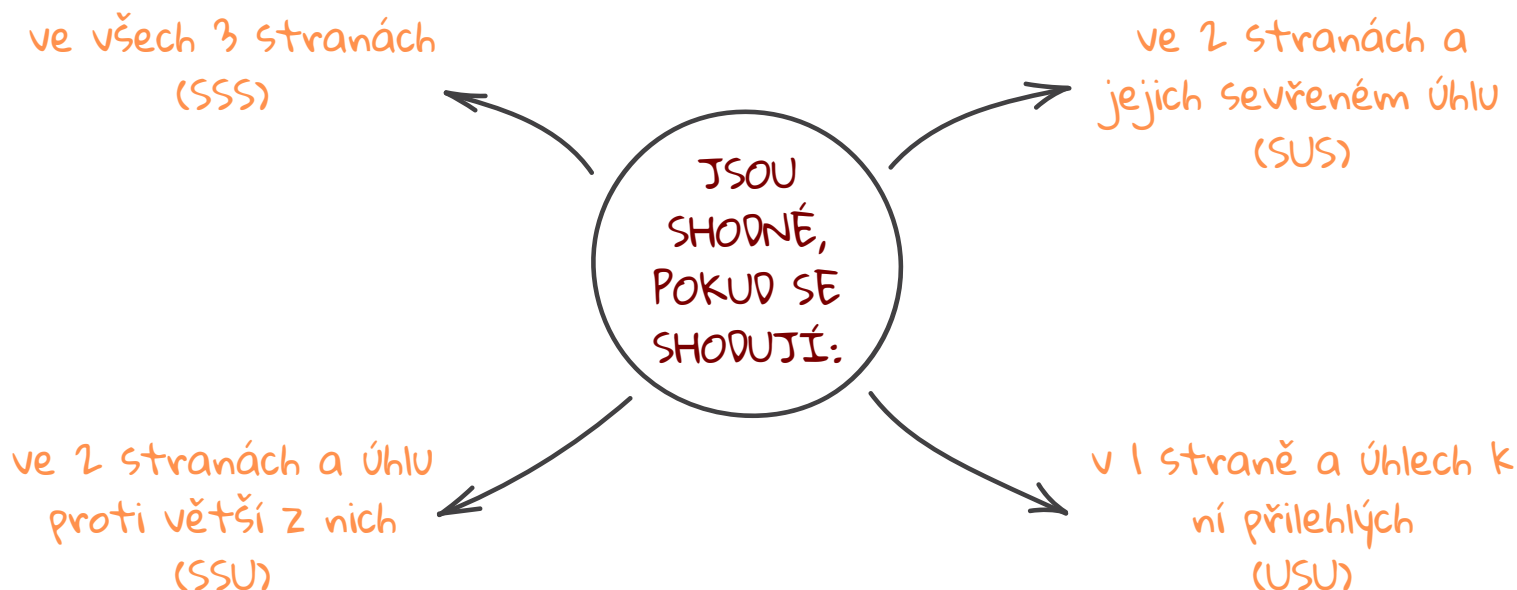
3) Vrchol stromu je upevněn lanem, které je dlouhé 12 m. Úhel, který lano svírá se zemí, je $40^{\circ}35'$. Jaká je výška stromu?

4) Turista se dívá na vrchol věže, která stojí od něj ve vzdálenosti 50 m. Úhel, pod kterým vrchol věže vidí, je $25^{\circ}20'$. Vypočítej výšku věže. Turista je vysoký 175 cm (od země k očím).

5) Lanovka má délku lana 120 m. Stanice je na svahu ve vodorovné vzdálenosti 100 m od nástupiště dole. Pod jakým úhlem stoupá lanovka vzhůru?

SHODNOST TROJÚHELNÍKŮ

Rovinné útvary jsou shodné, dají-li se přemístěním ztotožnit.
Zjišťujeme ji podle vět o shodnosti trojúhelníků:



• Označení: $\cong$

- Zápis určuje i které vrcholy si odpovídají
- $\triangle ABC \cong \triangle PQR$, odpovídají si vrcholy A a P, B a Q a C a R

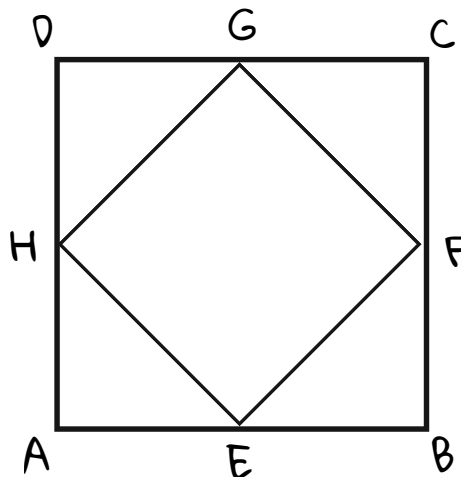
Příklady na trigonometrii:

1) Je dán čtverec ABCD se středem S a body EFGH, které jsou po řadě středy stran AB, BC, CD, DA.

- Určete aspoň 3 trojúhelníky, které jsou shodné s:
 - trojúhelníkem HEC

○ AEC

○ AFS



2) Určete, zda jsou shodné pravoúhlé $\triangle ABC$ s pravým úhlem při vrcholu C a $\triangle PRQ$ s pravým úhlem při vrcholu Q, jestliže platí:

- úhel CAB je 30° , $AB = 5$ a úhel QPR je 30° $PR = 5$

- $AC = 3$, $BC = 4$ a $PR = 5$

- $AC = 3$, úhel CAB = 60° $QR = 3$ a úhel QRP je 30°

PODOBNOST TROJÚHELNÍKŮ

Rovinné útvary, které jsou shodné, nebo se shodnými stanou, když rozměry zvětšíme či zmenšíme v určitém poměru = **PODOBNÉ**

- Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné, existuje-li kladné číslo k tak, že pro délky jejich stran platí:

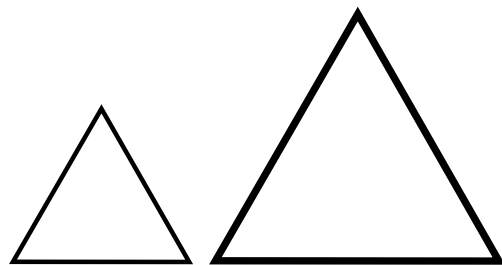
- $a' = ka$

- $b' = kb$

- $c' = kc$

- Číslo k = koeficient podobnosti

- Pro $k=1$ = trojúhelníky shodné



- Označení: $\sim$

- Opět si příslušné vrcholy odpovídají

- $ABC \sim PQR$

- Výpočet:

- trojčlenkou

- úvahou

- vzorcem: $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$

v poměru 2 stran a
úhlu proti větší z nich

v poměru 2 stran a
jejich sevřeném úhlu

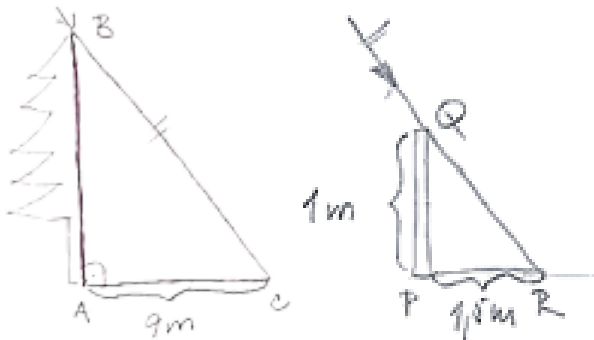
JSOU
PODOBNÉ,
POKUD SE
SHODUJÍ:

ve 2 úhlech

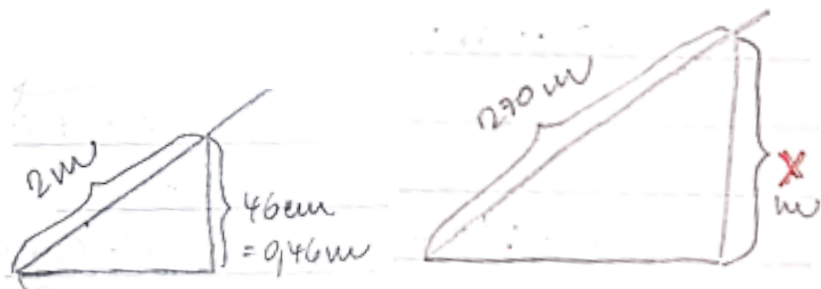
Příklady na podobnost:

1) Určete, zda jsou Δ o stranách 6, 8, 9 a 5, $20/3$, 7,5 podobné:

2) Stín stromu má délku 9 m, stín nedaleké svislé metrové tyče je v tutéž dobu dlouhý 1,5 m. Určete výšku stromu:



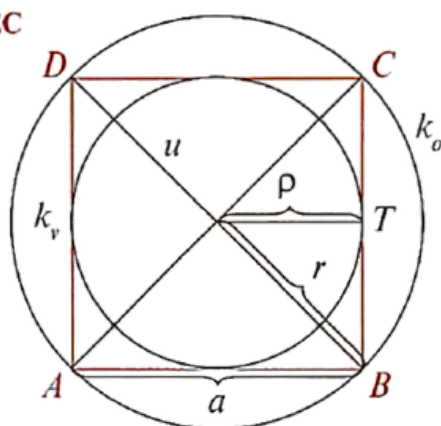
- 3) Přímá cesta stoupá na každé 2 m o 46 cm. O kolik vystoupáme, když ujdeme po cestě 270 m?



- 4) Určete měřítko mapy, jestliže Δ pole o rozměrech 162,5 m; 117,5 m; 180 m je na mapě zakresleno jako Δ o stranách 6,5 mm; 4,7 mm a 7,2 mm.

ROVINNÉ OBRAZCE I

ČTVEREC



A, B, C, D

vrcholy čtverce

a

strana čtverce, $a \perp a$

$$u = a\sqrt{2}$$

úhlopříčka čtverce

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

poloměr kružnice opsané k_o

$$\rho = \frac{a}{2}$$

poloměr kružnice vepsané k_v

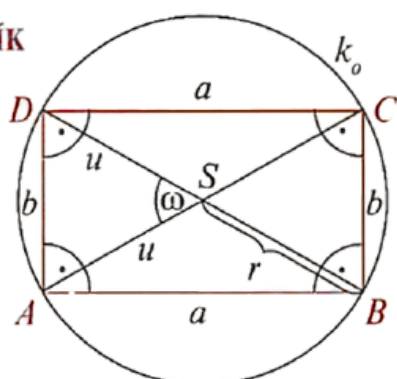
$$o = 4a$$

obvod čtverce

$$S = a^2 = \frac{u^2}{2}$$

obsah čtverce

OBDELNÍK



A, B, C, D

vrcholy obdélníku

a, b

strany obdélníku, $a \perp b$

$$u = \sqrt{a^2 + b^2}$$

úhlopříčka obdélníku

ω

úhel úhlopříček

$$r = \frac{u}{2}$$

poloměr kružnice opsané k_o

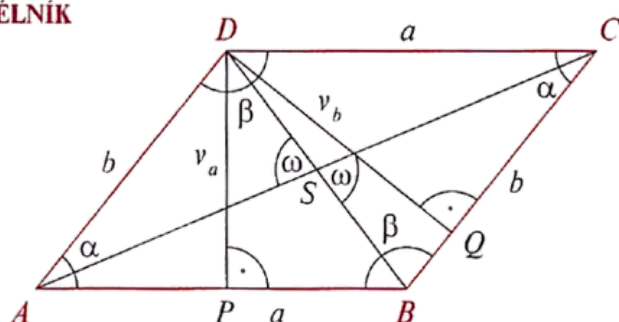
$$o = 2(a + b)$$

obvod obdélníku

$$S = ab$$

obsah obdélníku

KOSODÉLNÍK



A, B, C, D

vrcholy kosodélníku, $\alpha + \beta = 180^\circ$

a, b

strany kosodélníku

e, f

úhlopříčky kosodélníku

ω

úhel úhlopříček

v_a, v_b

výšky kosodélníku

$$o = 2(a + b)$$

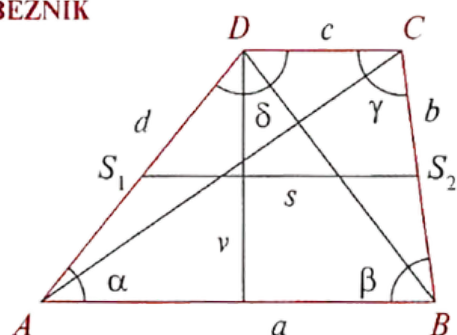
obvod kosodélníku

$$S = av_a = bv_b$$

obsah kosodélníku

$$S = a \cdot b \cdot \sin \beta$$

LICHOBĚŽNÍK



A, B, C, D

vrcholy lichoběžníku

a, b, c, d

strany lichoběžníku

a, c

základny lichoběžníku, $a \parallel c$

b, d

ramena lichoběžníku

e, f

úhlopříčky lichoběžníku

$$s = \frac{a + c}{2}$$

střední příčka lichoběžníku

v

výška lichoběžníku

$$o = a + b + c + d$$

obvod lichoběžníku

$$S = \frac{a + c}{2} \cdot v = sv$$

obsah lichoběžníku

Je-li $b = d$, nazýváme lichoběžník

ROVNORAMENNÝ. Je-li $\alpha = 90^\circ$ (tedy i $\delta = 90^\circ$), nazýváme lichoběžník **PRAVOÚHLÝ**.

Příklady na čtverec a obdélník:

1) Vypočítejte obsah a obvod čtverce, jehož úhlopříčka je 6 cm:

2) Vypočítejte obsah obdélníku, je-li jeho obvod 24 cm a jeho jedna strana má velikost 7,2 cm:

3) Pozemek tvaru obdélníku má $S = 600 \text{ m}^2$. Jeho 1 strana je dlouhá 30 m. Kolik sloupků potřebujeme k ohrazení pozemku, má-li být vzdálenost mezi sloupky 2,5 m?

4) Babička má obdélníkový pokoj a chce po vás, abyste jí koupili nový koberec. Ví, že obvod pokoje je 34 m a jedna strana pokoje je o 2 m delší než druhá. Jaké jsou rozměry pokoje a kolik zaplatíte za koberec, když 1 m^2 stojí 350,-?

Příklady na kosodélník:

1) Vypočítejte obsah rovnoběžníku, když jeho strany jsou:

$$a = 25,3$$

$$b = 13,8$$

úhel α je 72°

2) Vypočítejte obsah rovnoběžníku, když jeho strany jsou:

$$a = 97$$

$$b = 110$$

úhel α je $67^\circ 38'$:

Příklady na lichoběžník:

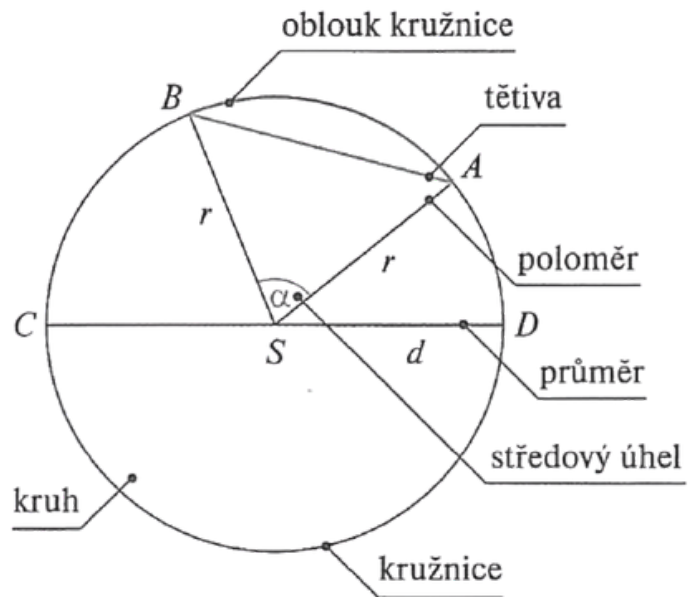
1) Vypočítejte výšku v lichoběžníku ABCD, mají-li základy velikosti $a = 28 \text{ cm}$, $c = 21 \text{ cm}$ a obsah $S = 1764 \text{ cm}^2$.

2) Lichoběžník ABCD je dán základnou $a = 24 \text{ cm}$, výškou $v = 10 \text{ cm}$ a obsahem $S = 185 \text{ cm}^2$. Jakou velikost má strana c ?

ROVINNÉ OBRAZCE II

Kružnice:

- určuje obvod
- Vzorec: $o = 2\pi r$
- Označení: k
 - Střed kružnice
 - Označení: S
 - Poloměr kružnice:
 - Označení: r



Kruh:

- určuje obsah
- Vzorec: $S = \pi r^2$
- Označení: K
 - Střed kruhu
 - Označení: S
 - Poloměr
 - Označení: r

Tětiva:

- Úsečka spojující dva body na kružnici
 - Nejdelší tětiva je o délce $d = 2r = \text{PRŮMĚR}$

Příklady na kružnici a kruh:

1) Vypočítejte průměr a obsah kruhu, jeli obvod 400 cm.

2) Vypočítejte poloměr kruhu, je-li jeho obsah $660,52 \text{ cm}^2$.

3) Určete poloměr atletické dráhy tvaru kružnice, kterou atlet musí oběhnout 3x, aby uběhl 5 km.

4) Zadní kola traktoru mají průměr 1,25 m. Kolikrát se otočí kolo při ujetí 1,5 km?

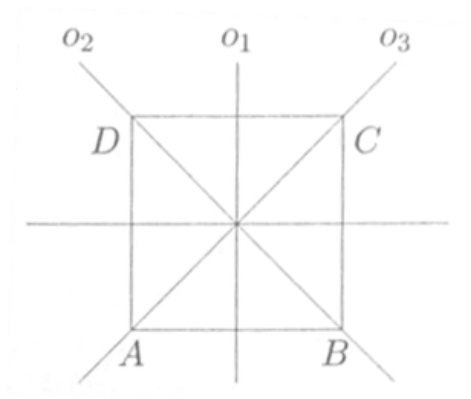
SHODNÁ ZOBRAZENÍ, STEJNOLEHLOST

Shodná zobrazení:

- Přímá shodnost - zobrazí každý orientovaný úhel v souhlasně orientovaný úhel
 - Středová souměrnost (S)
 - Posunutí neboli translace (T)
 - Otočení neboli rotace (R)
 - Identita (I)
- Nepřímá shodnost - zobrazí orientovaný úhel v opačně orientovaný úhel
 - Osová souměrnost (O)

Osová souměrnost:

- Každý čtverec - podle každé své úhlopříčky a přímek procházející středy jeho protějších stran osově souměrný
- Každá kružnice - podle každé přímky procházející středem je osově souměrná



Středová souměrnost:

- Každá kružnice
- Každý čtverec

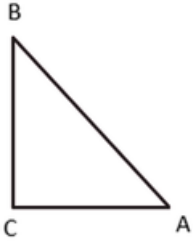


Stejnolehlost:

- Už nepatří mezi shodná zobrazení
- Zvětšení či zmenšení útvaru v určitém poměru → jsou si podobné

Příprava na I. čtvrtletní práci A

1) Vypočítej obvod, obsah pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny mají délku strany 50 cm a 35 cm.



2) V pravoúhlém trojúhelníku známe:

stranu $a = 30$ cm

úhel $\alpha = 32^\circ 12' 48''$

Vypočítejte: velikost strany b a c a úhel β .

3) Jak je vysoká budova, když vrhá stín délky 25 m a nedaleká metrová tyč vrhá stín dlouhý 0,8 m?

- 4) Vypočítejte velikost strany a v lichoběžníku, když známe stranu $c = 15$ cm a výšku $v = 8$ cm. Obsah lichoběžníku je 1200 cm².



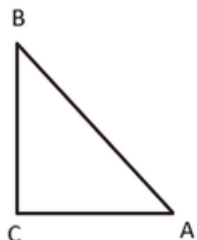
- 5) Pozemek tvaru půlkruhu je třeba oplotit. Na rovnou část plotu se použije 28 m pletiva. Kolik m pletiva bude třeba na oplocení zbytku plotu po oblouku?



28 m

Příprava na I. čtvrtletní práci B

- 1) Vypočítej obvod, obsah pravoúhlého trojúhelníku, jehož přepona má délku 50 cm a strana $a = 12$ cm.

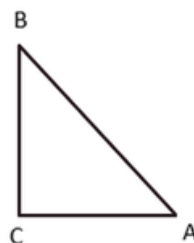


- 2) V pravoúhlém trojúhelníku známe:

stranu $a = 11$ cm

stranu $c = 23$ cm.

Vypočítejte: velikost strany b , úhel α i β .



- 3) Vysílač je 120 m vysoký a vrhá stín délky 325 m. Naše babička má s sebou vycházkovou hůl, která vrhá stín 2 metry. Jak vysoká je babiččina vycházková hůl?

4) Vypočítejte obvod a obsah rovnoramenného lichoběžníku, když známe výšku $v = 12$ cm, strana $a = 22$ cm a strana $c = 15$ cm.



5) Mám pozemek tvaru kruhu. Je ale mě ale moc velký, tak jsme se s kamarádem domluvili, že si pozemek rozdělíme na 2 stejné části. Pozemek z jedné strany na druhou přejdu 200 kroky. Jeden můj krok má cca půl metru. Jak velkou rozlohu (obsah) bude mít můj nový (poloviční) pozemek a kolika m pletiva budu potřebovat k jeho oplocení?

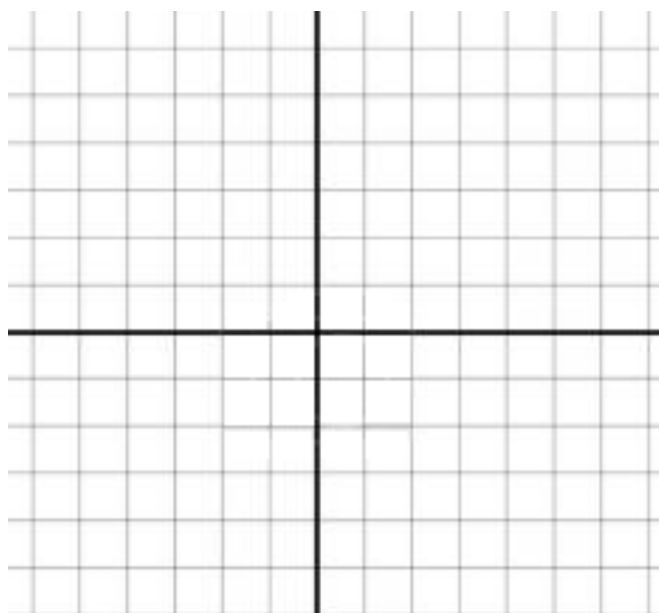
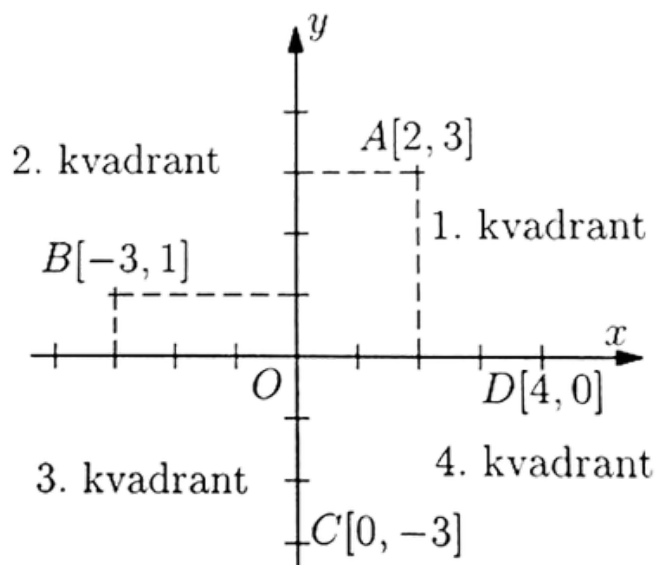


Exponenciální a logaritmické funkce

Opakování:

- Označení: f
- Hodnoty jedné veličiny závisí na hodnotách veličiny jiné
- Možnost zápisu:
 - $f(x) = 2x$
 - $f: y = 2x$
- Při zápisu funkce řešíme:
 - a) matematické vypočítání tabulky
 - b) zakreslení do kartézské soustavy souřadnic

Kartézská soustava souřadnic:



- Vyznačte do KS tyto body:
 - A [3, 2] B [1, -3] C [0, -4] D [0, 5] E [-2, -2] F [1, -4]

EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

• Exponenciální funkce:

- $f(x) = a^x$
- nesmí se rovnat 1 → to by byla funkce -----

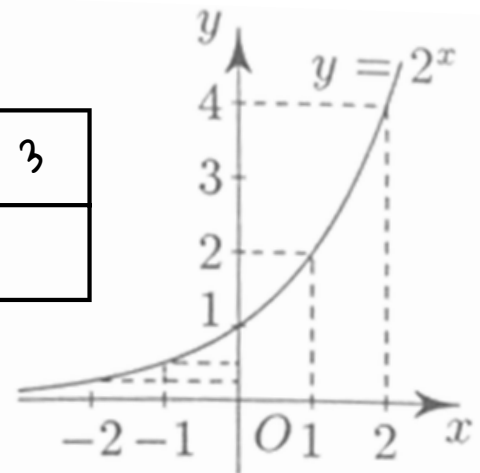
• Graf exponenciální funkce:

- Exponenciální křivka: -----

■ Graf exponenciální funkce, kdy a je větší než 1

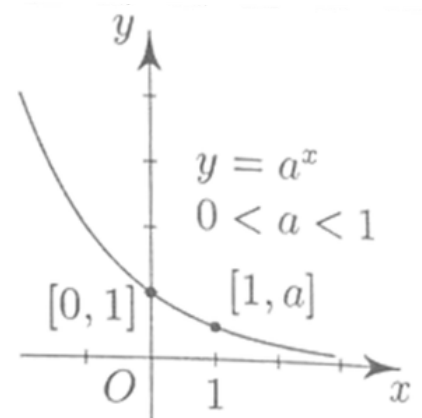
- Např. $y = 2^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

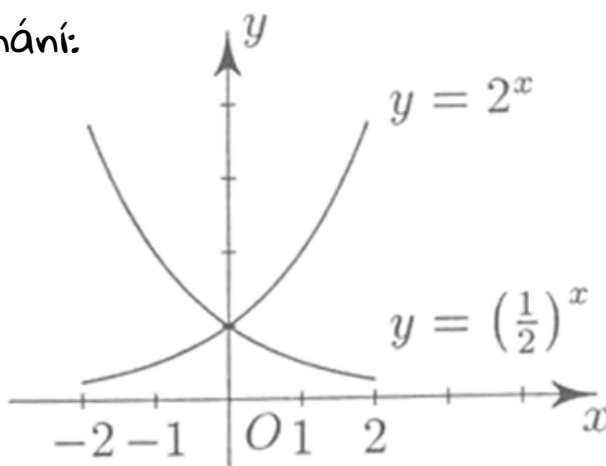


■ Graf exponenciální funkce pro $0 < a < 1$ ($a = 1/2$)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



• Porovnání:



Příklady na exponenciální funkci:

1) Určete, která z těchto čísel jsou větší než 1, a která menší než 1:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{5}{6}}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{7}{8}}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{0,5}$$

Opakování:

X $\frac{\text{mocnina}}{\text{odmocnina}}$ $3^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{3^5}$

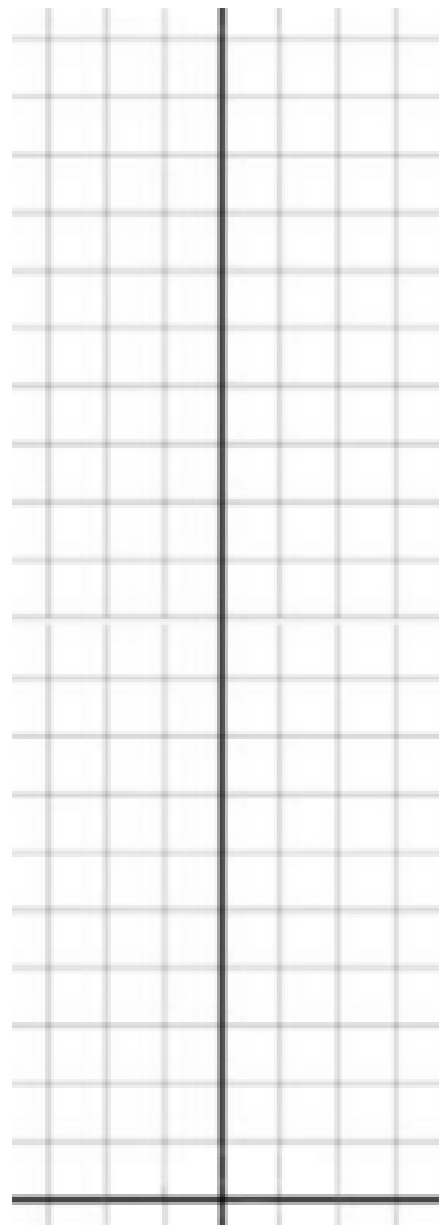
X $\overset{\text{mínus přetáčí čitatele a jmenovatele}}{-5} = \left(\frac{1}{x}\right)^5$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

2) Nakreslete grafy funkcí:

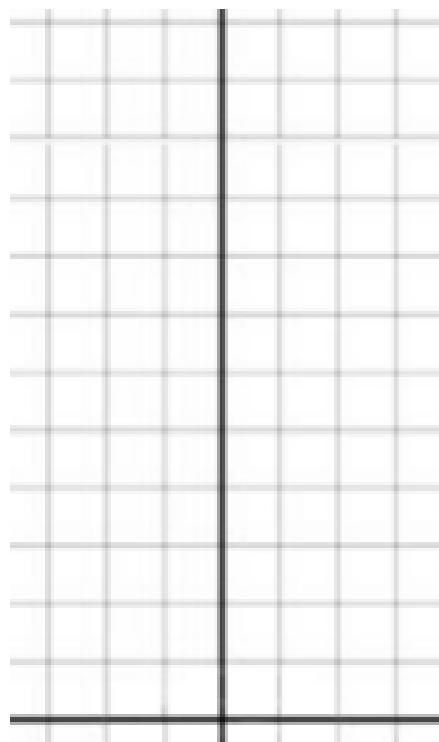
$$y = 3^x$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



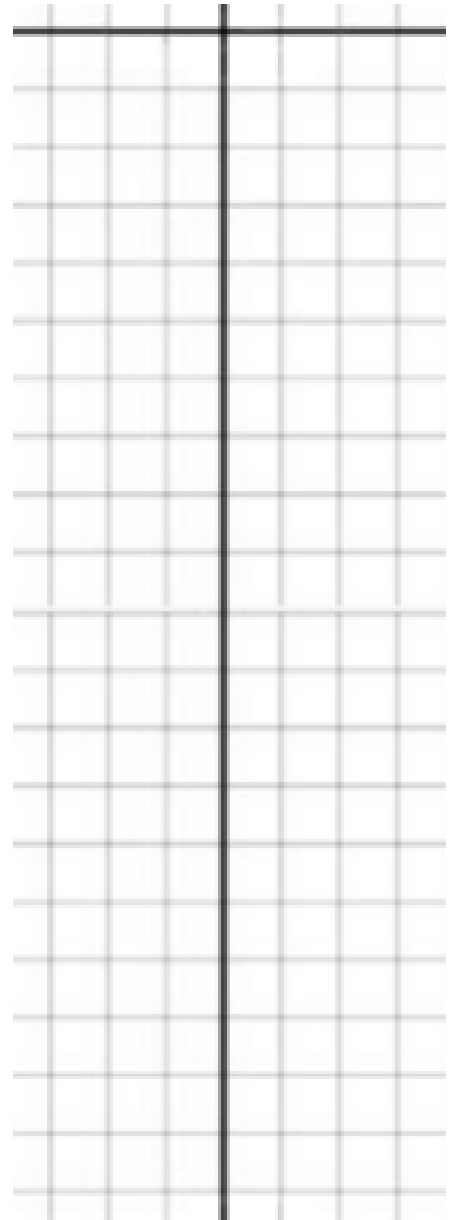
$$y = 1 + 2^x$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



$$y = -3^x$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



LOGARITMUS

- Logaritmus každého kladného čísla b při základu a je roven číslu v , pro které platí: $a^v = b$
- Logaritmus čísla b při základu a je číslo, na které musíme základ a umocnit, abychom dostali číslo b
- Pro všechna $a > 0$, $a \neq 0$, $b > 0$
 - $\log_a b = v$ neboli $a^v = b$
 - $\log_7 49 = 2$ neboli $7^2 = 49$
 - $\log_{10} 0,1 = -1$ neboli $10^{-1} = 0,1$

Příklady na logaritmus:

1) Zapište následující čísla pomocí logaritmu s daným základem:

- Číslo 1 jako logaritmus se základem 5
- Číslo 0 jako logaritmus se základem 14
- Číslo 2 jako logaritmus se základem 3
- Číslo 0,5 jako logaritmus se základem 10

2) Vypočítejte:

- | | |
|------------------|---------------------|
| • $\log_3 3 =$ | • $\log_7 1 =$ |
| • $\log_4 4 =$ | • $\log_2 1 =$ |
| • $\log_3 1 =$ | • $\log_3 9 =$ |
| • $\log_2 16 =$ | • $\log_{10} 100 =$ |
| • $\log_5 125 =$ | • $\log_{0,1} 10 =$ |

3) Vypočítejte x:

- $\log_3 x = 4$
- $\log_{10} x = -1$
- $\log_5 x = 1$
- $\log_{10} x = 10$
- $\log_3 x = 0$
- $\log_{1/2} x = -1$
- $\log_{1/4} x = -3$
- $\log_2 x = 3$
- $\log_3 x = \frac{3}{2}$
- $\log_{10} x = 2$

4) Těžší příklady:

- $\log_{1/3} \frac{1}{3} =$
- $\log_3 \frac{1}{3} =$
- $\log_{1/4} \frac{1}{16} =$
- $\log_{1/2} \frac{1}{16} =$
- $\log_3 \frac{1}{27} =$
- $\log_{1/2} 4 =$
- $\log_2 \frac{1}{4} =$
- $\log_{1/5} \frac{1}{125} =$
- $\log_{1/4} x = -3$
- $\log_{1/2} x = -2$

5) Nejtěžší příklady:

- $\log_5 \sqrt{5} =$
- $\log_5 \sqrt{\frac{1}{5}} =$
- $\log \sqrt{5} \frac{1}{5} =$
- $\log_{10} \sqrt{10} =$
- $\log_{\sqrt{2}} 2 =$
- $\log_3 x = 2$
- $\log_3 x = -\frac{1}{2}$
- $\log_2 x = -\frac{3}{2}$
- $\log_3 x = \frac{1}{2}$
- $\log_3 x = \frac{2}{3}$

Procvičování k testu:

Vypočítejte:

- $\log_2 x = 6$

- $\log_5 x = -2$

- $\log_{10} x = 0,5$

- $\log_4 x = \frac{3}{2}$

- $\log_3 x = -\frac{1}{2}$

- $\log_2 x = 3$

- $\log_7 x = 1$

- $\log_9 x = 0$

- $\log_{10} x = -2$

- $\log_3 x = \frac{1}{2}$

- $\log_5 x = \frac{3}{2}$

- $\log_6 x = -\frac{1}{2}$

- $\log_{11} x = 2$

- $\log_{12} x = \frac{1}{3}$

- $\log_{12} x = 4$

- $\log_{13} x = -2$

- $\log_{\sqrt{2}} x = 3$

- $\log_{\sqrt{7}} x = 1$

- $\log_{0,1} x = -3$

- $\log_8 x = \frac{1}{3}$

- $\log_{27} x = \frac{2}{3}$

- $\log_{49} x = \frac{1}{2}$

- $\log_{25} x = -\frac{1}{2}$

- $\log_3 x = 4$

- $\log_8 x = -1$

- $\log_5 x = 0$

- $\log_2 x = \frac{5}{2}$

- $\log_{0,2} x = 2$

- $\log_{\sqrt{3}} x = 4$

- $\log_4 x = -\frac{3}{2}$

Vypočítejte:

- $\log_x 81 = 4$

- $\log_x \frac{1}{9} = -2$

- $\log_x 32 = \frac{5}{3}$

- $\log_x 7 = 0$

- $\log_2 \frac{1}{8} =$

- $\log_2 \frac{1}{32} =$

- $\log_3 \frac{1}{9} =$

- $\log_3 \frac{1}{81} =$

- $\log_4 \frac{1}{64} =$

- $\log_5 \frac{1}{25} =$

- $\log_7 \frac{1}{49} =$

- $\log_9 \frac{1}{3} =$

- $\log_8 \frac{1}{4} =$

- $\log_{1/4} 16 =$

- $\log_{1/2} 16 =$

- $\log_{1/3} 9 =$

- $\log_{1/9} 81 =$

- $\log_{1/5} 125 =$

- $\log_{1/2} 32 =$

- $\log_{1/7} 7 =$

- $\log_{1/8} \frac{1}{8} =$

- $\log_{1/2} \frac{1}{32} =$

- $\log_{1/3} \frac{1}{9} =$

- $\log_{1/3} \frac{1}{81} =$

- $\log_{1/4} \frac{1}{64} =$

- $\log_{1/5} \frac{1}{25} =$

- $\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{7} =$

- $\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{49} =$

- $\log_{\sqrt{4}} 4 =$

- $\log_{\sqrt{4}} 16 =$

- $\log_{\sqrt[4]{4}} =$

- $\log_2 \sqrt{2} =$

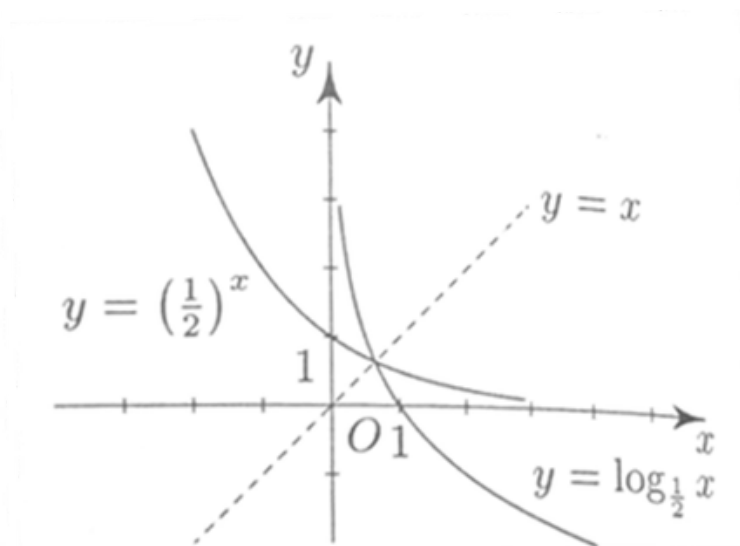
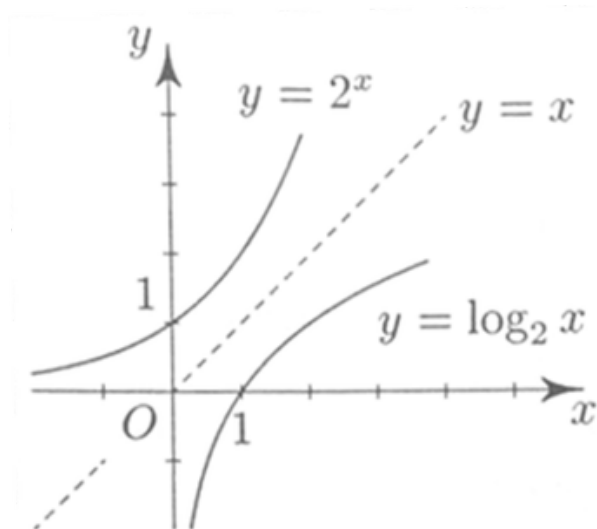
LOGARITMICKÁ FUNKCE

Inverzní (opačná/naruby) funkce k exponenciální funkci

- Obecný zápis funkce: $\log_a x$
- Logaritmická funkce $y = \log_a x$,
 - kde $a > 0$, $a \neq 1$, je inverzní funkce k exponenciální funkci $y = a^x$.
 - Její funkční hodnota v bodě x_0 (tedy číslo $\log_a x_0$), se nazývá logaritmus čísla x při základu a
 - $y = \log_2 x$ je inverzní k $y = 2^x$
 - $y = \log_{1/3} x$ je inverzní k $y = (1/3)^x$...

Graf logaritmické funkce:

- Logaritmická křivka
 - TIP: Pokud je náročné zakreslit logaritmickou funkci, zakreslete si inverzní funkci exponenciální, poté ji zrcadlově převratte podle funkce $y = x$



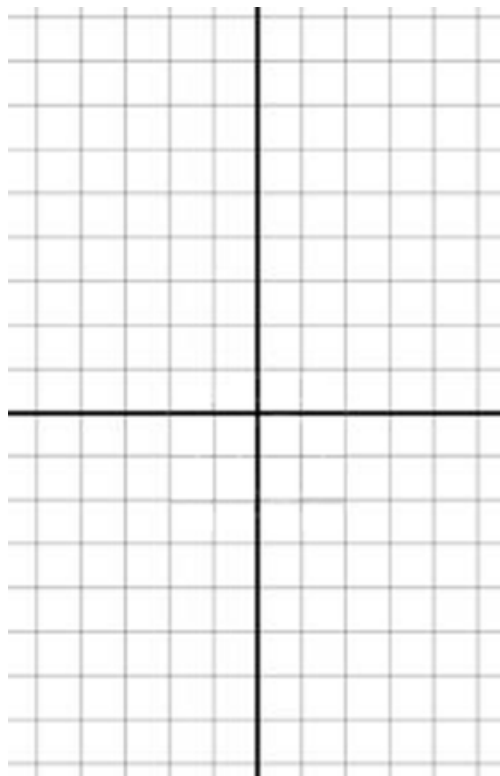
Příklady na logaritmickou funkci:

1) $y = \log_2 x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

→ převod na inverzní exponenciální $y = 2^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

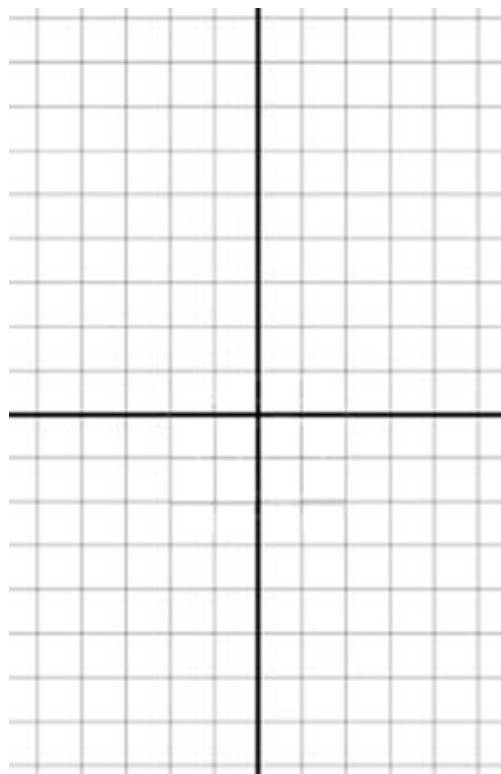


2) $y = \log_3 x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

→ převod na inverzní exponenciální $y = 3^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

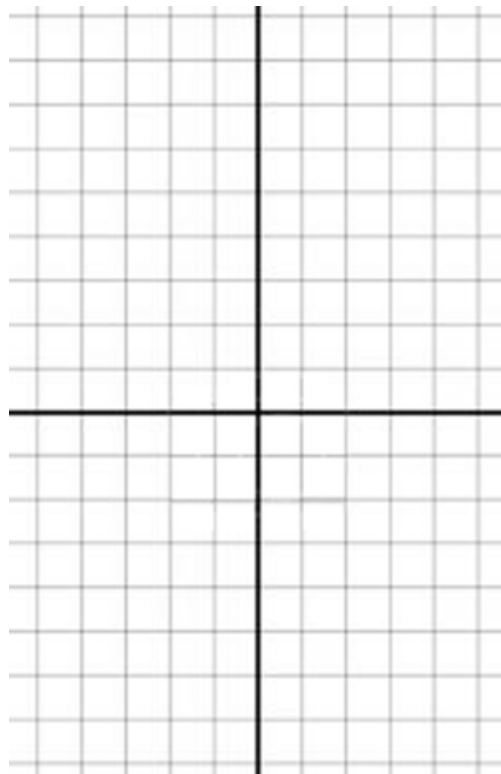


$$3) y = \log_{\frac{1}{6}} x$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

→ převod na inverzní exponenciální

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

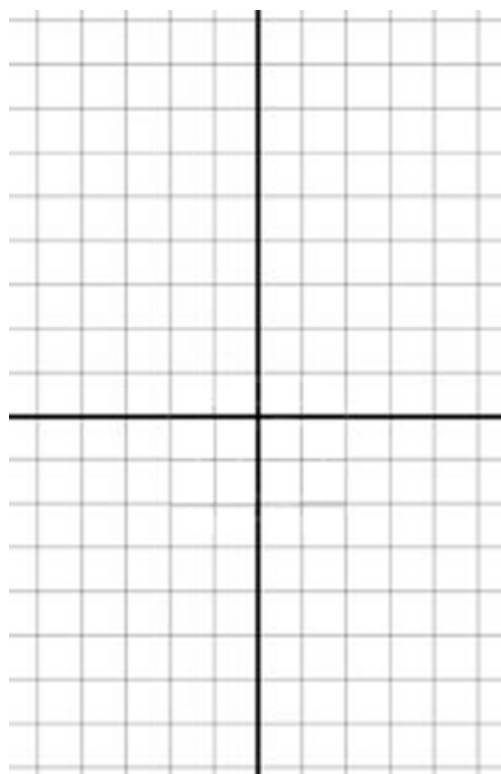


$$4) y = \log_{\frac{1}{5}} x$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

→ převod na inverzní exponenciální

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



VĚTY O LOGARITMECH

1) Věta o logaritmu součinu

- Logaritmus součinu kladných čísel je roven součtu jejich logaritmů
- Pro každé číslo $a > 0$, $a \neq 1$ a všechna kladná čísla u, v
 - $\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v$
 - $\log_2 10 = \log_2 (2 \cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + \log_2 5$

Příklady na logaritmus součinu:

- $\log_{10} 50 =$
- $\log_7 49 =$
- $\log_{10} 30 =$

2) Věta o logaritmu mocniny

- Logaritmus mocniny je roven součinu exponentu a logaritmu jejího základu
- Pro každé číslo $a > 0$, $a \neq 1$ a pro každé kladné číslo u a každé číslo s
 - $\log_a u^s = s \cdot \log_a u$
 - $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2 \cdot \log_7 7 = 2 \cdot 1 = 2$

Příklady na logaritmus mocniny:

- $\log_2 16 =$
- $\log_4 64 =$
- $\log_5 9 =$

3) Věta o logaritmu odmocniny

- Logaritmus odmocniny je roven součinu obráceného exponentu a logaritmu jejího základu
- Pro každé číslo $a > 0$, $a \neq 1$ a pro každé kladné číslo u a každé číslo $n \in \mathbb{N}$:
 - $\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u$

Příklady na logaritmus odmocniny:

- $\log_3 \frac{1}{125} =$
- $\log_2 \sqrt{3} =$
- $\log_{10} \sqrt{1000} =$

4) Věta o logaritmu podílu

- Logaritmus podílu kladných logaritmů je roven odečtu jejich logaritmů
- Pro každé číslo $a > 0$, $a \neq 1$ a všechna kladná čísla u, v a platí:
 - $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$

Příklady na logaritmus podílu:

- $\log_5 \frac{10}{125} =$
- $\log_3 \frac{1}{125} =$
- $\log_2 \frac{5}{\sqrt{10}} =$

5) Věta o logaritmech s různými základy

- Pro každé kladné číslo u a všechna čísla $a > 0$, $a \neq 1$ a $b > 0$, $b \neq 1$ platí:

$$\circ \log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}$$

$$\circ \log_2 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 2}$$

$$\circ \log_{1/2} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\log_2 x}{-1} = -\log_2 x$$

$$\circ \log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$$

PŘIROZENÝ X DEKADICKÝ LOGARITMUS

1) Dekadický

- Logaritmy o základu 10

- Označení: $\log x$

■ Pro zjednodušení se $\log_{10} x$ píše jen $\log x$

- Hodnoty logaritmů jsou sestaveny v logaritmických tabulkách

2) Přirozený

- Logaritmus o základu e

- e = Eulerovo číslo

■ iracionální číslo = číslo s nekonečným desetinným rozvojem

■ $e = 2, 718\ 281\ 828\dots$

- Označení: $\ln x$

Příklady na věty o logaritmech:

1) Nejlehčí příklady:

- $\log_2 16^2 =$
- $\log_4 16^2 =$
- $\log_{16} 16^2 =$
- $\log_{256} 16^2 =$
- $\log_2 2^{14} =$
- $\log_2 64 =$

2) Vypočítejte dle logaritmických vět:

- $\log_2 (\log_2 16) =$
- $\log_2 (\log_2 2) =$
- $\log_4 (\log_2 16) =$
- $\log_{10} (\log_2 2) =$

3) Zapište jako jeden logaritmus:

- $\log 10 + \log 4 =$

- $\log_2 5 + \log_2 12 =$

- $\log_3 \frac{1}{8} + \log_3 8 =$

- $3 \log 2 + \log 5 =$

- $2 + \log 4 =$

- $\log_6 40 - \log_6 5 =$

- $\log_{12} 120 - \log_{12} 150 =$

- $\log 25 + \log 40 =$

- $\log_4 2 + 3 \log_4 8 =$

EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE

- Neznámá se vyskytuje v exponentu mocnin

Lehká

- Lze převést na tvar
 - $a^x = a^b \rightarrow x = b$
 - $a > 0, a \neq 1$
- Např. $3^x = 81$
 $3^x = 3^4$
 $x = 4$

Náročnější

Pro maturanty

- Pokud dojdeme k rovnici
 - $a^x = b$
 - $a > 0, a \neq 1, b > 0$
- Výpočet zlogaritmováním:
 $a^x = b$
 $\log a^x = \log b$
 $x \log a = \log b$
 $x = \frac{\log b}{\log a}$
- Důkaz, že lze vypočítat i pomocí náročnějšího výpočtu:
 $3^x = 81$
 $\log 3^x = \log 3^4$
 $x \log 3 = 4 \log 3$
 $x = \frac{4 \log 3}{\log 3}$
 $x = 4 \cdot 1$
 $x = 4$

Příklady na exponenciální rovnice:

1) $8^x = 32$

2) $5^3 \cdot 5^9 = (5^x)^3$

$$3) 5^{34} = 5 \cdot 5^4$$

$$4) 5^{12} \cdot 5^9 = (5^7)^x$$

$$5) 25^x = 625^2$$

$$6) 6^x = 1296^{0,5}$$

$$7) \frac{1}{2^x} = 2048$$

$$8) 7^{x+1} = 2401$$

$$9) 5^{2x-1} = 3125$$

$$10) 5^2 \cdot 7^{x+1} = 8575$$

$$11) \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \cdot 4^x$$

Příklady na exponenciální rovnice - těžší:

$$1) 1 = 5^{3x-2}$$

$$2) 2^{3x-4} = 8^{2x+1}$$

$$3) 3^{2x-7} = 27^{15-8x}$$

$$4) 3^{x+2} = 3^x + 8$$

LOGARITMICKÉ ROVNICE

- Využíváme u nich poznatky o logaritmech plus někdy i o exponenciálních rovnicích

Příklady na logaritmické rovnice - lehké:

1) $\log_2 x = 3$

2) $\log_3 x = -2$

3) $\log_{0,5} x = 2$

4) $\log_2 x = \frac{1}{2}$

5) $\log_2 \frac{x}{16} = -4$

6) $\log_7 5x = 0$

7) $\log_2 (x + 1) = 3$

8) $3 \log_2 x = 15$

Příklady na logaritmické rovnice:

$$1) \log_2 \frac{x+2}{x-1} = -1$$

$$2) \log_5 \frac{500}{x+1} = \log_2 8$$

$$3) \log 0,1 + \log 2x = 1$$

$$4) \log_2 2x - \log_2 8 = 1$$

$$5) \log 2 - \log x = 1$$

$$6) \log 1000 + \log x = 4$$

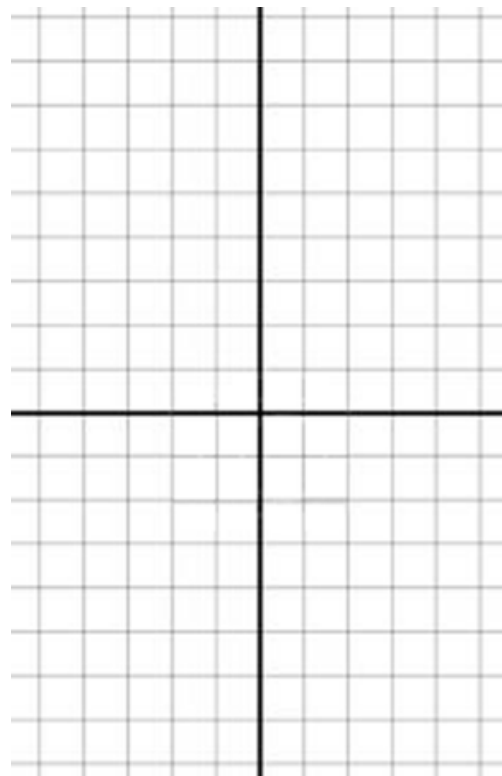
Příprava na II. čtvrtletní práci A

1) Exponenciální rovnici zakresli do grafu a z ní vytvoř rovnici logaritmickou:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \rightarrow y = \log_{(1/2)} x$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



2) Vypočítej hodnotu logaritmu:

- $\log_2 16 =$
- $\log_2 16^2 =$
- $\log_{1/3} \frac{1}{9} =$
- $\log_2 \sqrt{2} =$

3) Vypočítej pomocí vět o logaritmech:

$$\bullet (\log_{12} 24 + \log_{12} \frac{1}{2}) \cdot 4 \log_2 4 =$$

4) Vypočítej exponenciální rovnici:

$$5^{3x+2} = 25^{x-1}$$

5) Vypočítej logaritmickou rovnici:

$$\log_5 \frac{500}{x+1} = \log_2 4$$

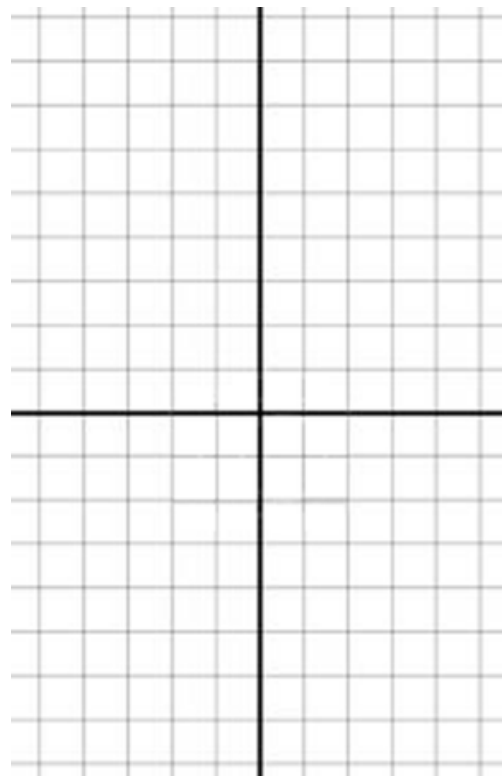
Příprava na II. čtvrtletní práci B

1) Exponenciální rovnici zakresli do grafu a z ní vytvoř rovnici logaritmickou:

$$y = \left(\frac{1}{8}\right)^x \rightarrow y = \log_{(1/8)} x$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



2) Vypočítej hodnotu logaritmu:

- $\log_5 125 =$
- $\log_4 16^2 =$
- $\log_{1/4} \frac{1}{16} =$
- $\log_{\sqrt{2}} 2 =$

3) Vypočítej pomocí vět o logaritmech:

$$\bullet (\log_8 128 - \log_8 2) \cdot 2 \log_3 9 =$$

4) Vypočítej exponenciální rovnici:

$$2^{3-x} = 4^{2-x}$$

5) Vypočítej logaritmickou rovnici:

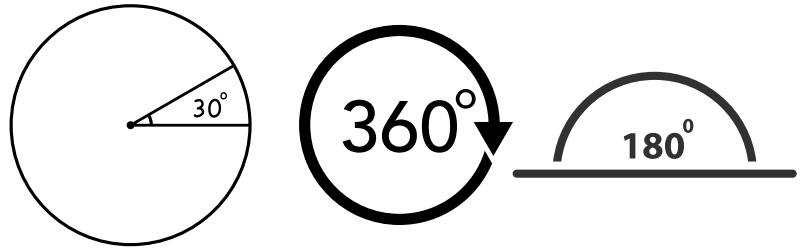
$$\log_2 \frac{100}{x+1} = \log_5 25$$

Goniometrie

ÚHLÝ

Stupňová míra:

- **Stupeň:** 1°
 - $1/90$ pravého úhlu
- **Úhlová minuta:** $1'$
 - $1^\circ = 60'$
- **Úhlová sekunda:** $1''$
 - $1' = 60''$
 - $1^\circ = 60' = 3600''$
- Sčítání a odečítání stupňů:
 - v šedesátkové soustavě
- Pro připomenutí převodů se koukni na stranu 10

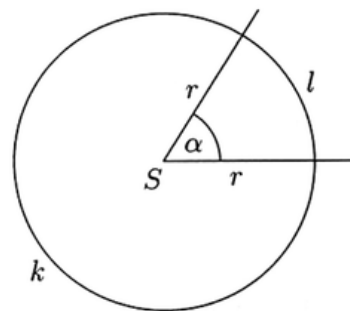


Opakování na převody:

- | | |
|--------------------|--------------------------|
| • $5,4^\circ =$ | • $12^\circ 27' =$ |
| • $98,6^\circ =$ | • $88^\circ 9' =$ |
| • $126,37^\circ =$ | • $100^\circ 8' 24'' =$ |
| • $325,65^\circ =$ | • $200^\circ 10' 48'' =$ |

Oblouková míra:

- Úhel v jednotkové míře = **RADIÁN (rad)**
- Úhel, jehož velikost je rovna l (velikost úhlu se určuje pomocí délky oblouku kružnice)
 - Délka l = poloměru r



- Převod mezi radiány a stupni:
 - Úhlu 360° odpovídá oblouk délky celé kružnice, tedy $2\pi r$

○ ZNÁM ÚHEL, CHCI RADIÁN: $\alpha = \frac{180}{\pi} x$

○ ZNÁM RADIÁN, CHCI ÚHEL: $x = \frac{\pi}{180} \alpha$

Příklady na převody radiánů a stupňů:

• $0^\circ =$

• $18^\circ =$

• $45^\circ =$

• $50^\circ =$

• $60^\circ =$

• $90^\circ =$

• $180^\circ =$

• $150^\circ =$

• $210^\circ =$

• $\frac{\pi}{6} =$

• $\frac{3\pi}{2} =$

• $2\pi =$

• $\frac{3\pi}{20} =$

• $\frac{5\pi}{9} =$

• $\frac{7\pi}{8} =$

• $\frac{\pi}{2} =$

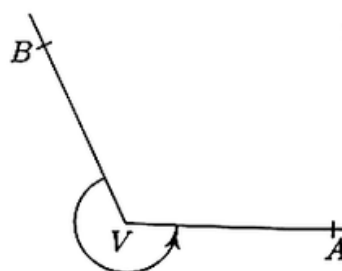
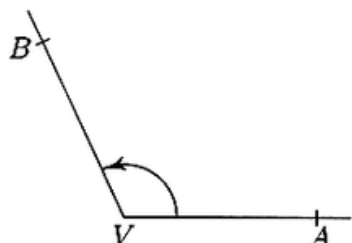
• $\frac{7\pi}{6} =$

Orientovaný úhel:

- Úhel, který je určen dvěma polopřímkami se společným počátkem
 - Orientovaný úhel:



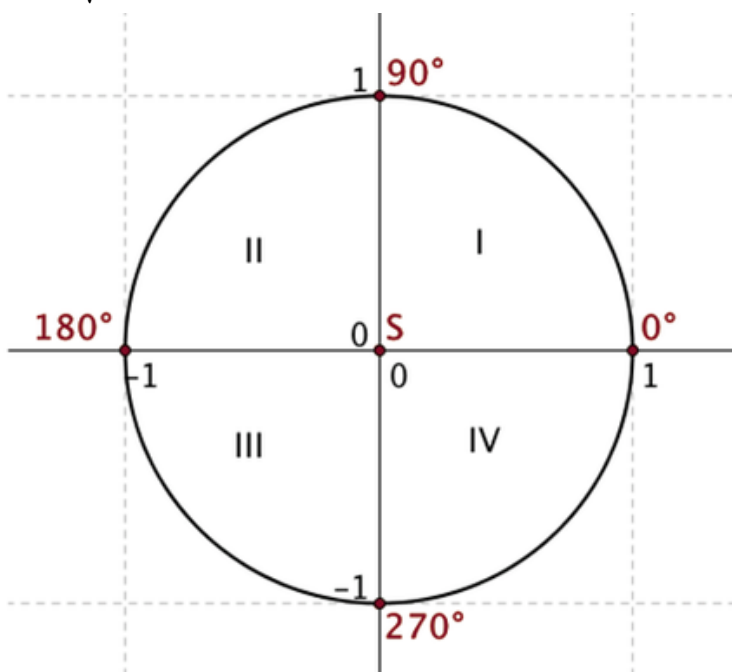
- Polopřímky VA a VB = **ramena** orientovaného úhlu
- Společný počátek = **vrchol** orientovaného úhlu



- **Velikost orientovaného úhlu**
 - Číslo, které udává, o kolik radiánů či stupňů se musí otočit počáteční rameno, aby splynulo s koncovým ramenem.
 - **Kladné číslo** = kladný smysl otáčení = proti hod. ručičkám
 - **Záporné číslo** = záporný smysl = po hodinových ručičkách

Jednotková kružnice:

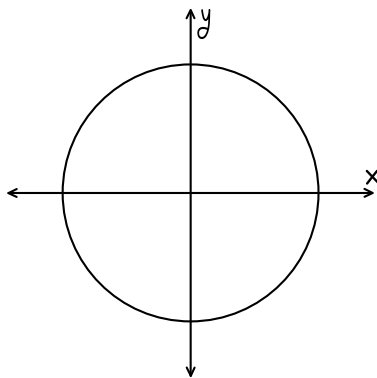
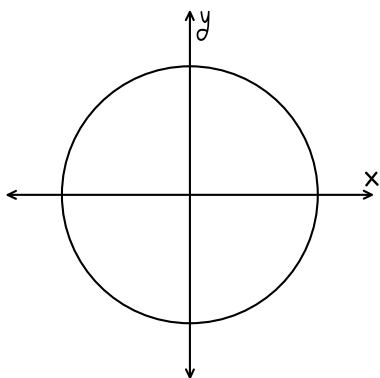
- Kružnice, která má poloměr délky jedné a střed této kružnice se nachází ve středu souřadnicového systému, tedy v bodě [0, 0]
- Rozdělena do čtyř částí = **KVADRANTŮ**



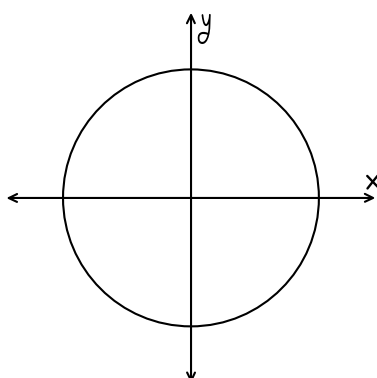
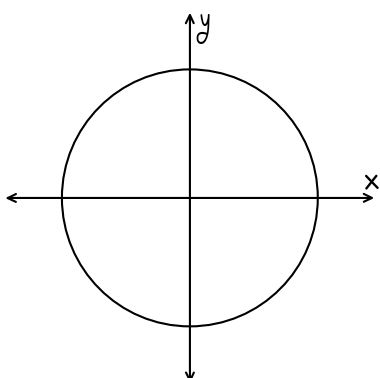
Příklady na jednotkovou kružnici:

1) Vyznačte na jednotkové kružnici úhly zadané velikosti a запиšte úhly ve stupních:

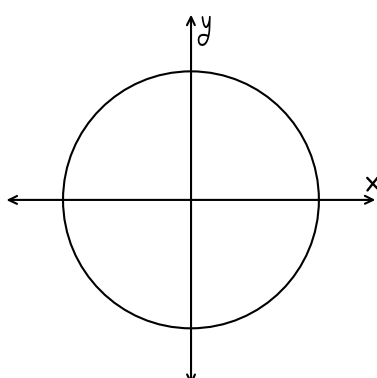
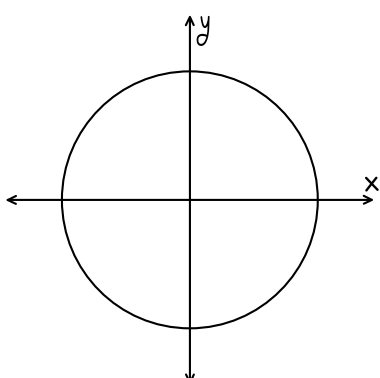
- $\frac{\pi}{2}$



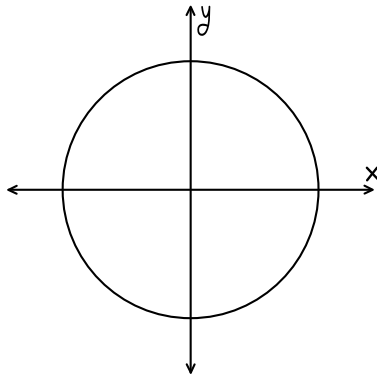
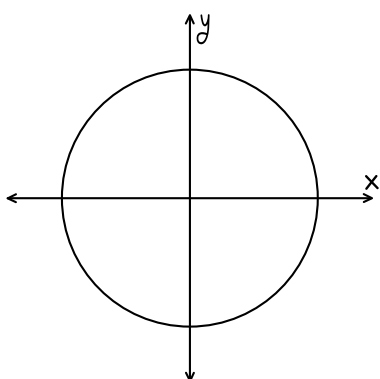
- $\frac{3\pi}{2}$



- $\frac{\pi}{3}$



- $\frac{2\pi}{3}$



- $\frac{\pi}{4}$

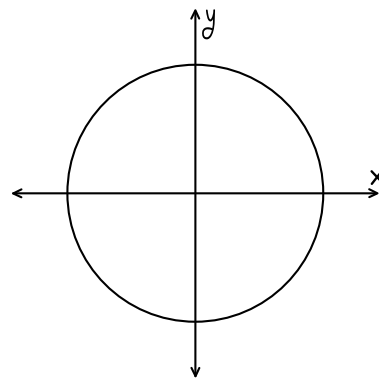
- $\frac{7\pi}{4}$

- $\frac{\pi}{6}$

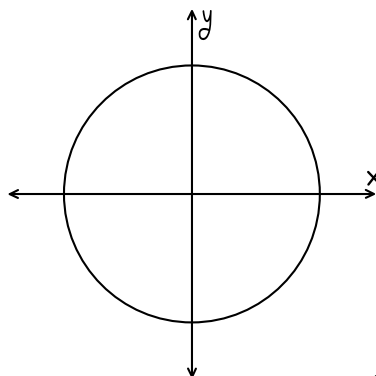
- $\frac{11\pi}{6}$

2) Určete základní velikosti orientovaných úhlů:

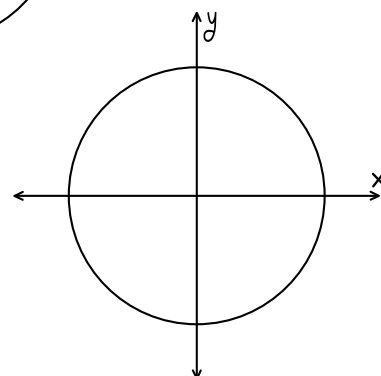
- $-\frac{16\pi}{9}$



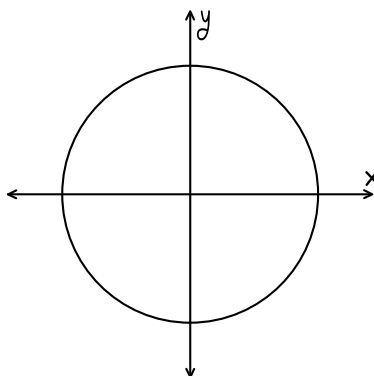
- $-\frac{\pi}{9}$



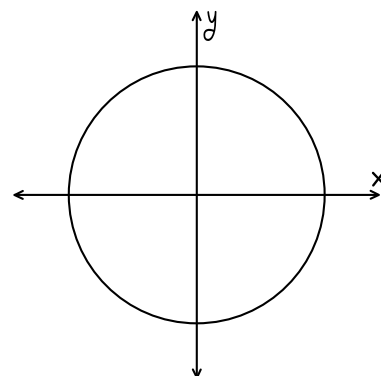
- $\frac{35\pi}{9}$



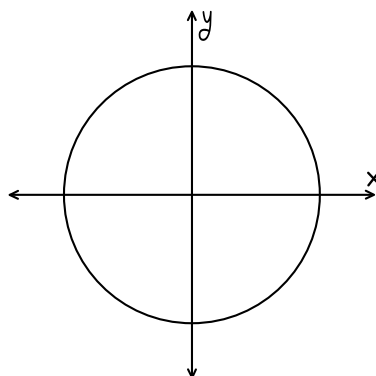
- $\frac{20\pi}{9}$



- $-\frac{34\pi}{9}$

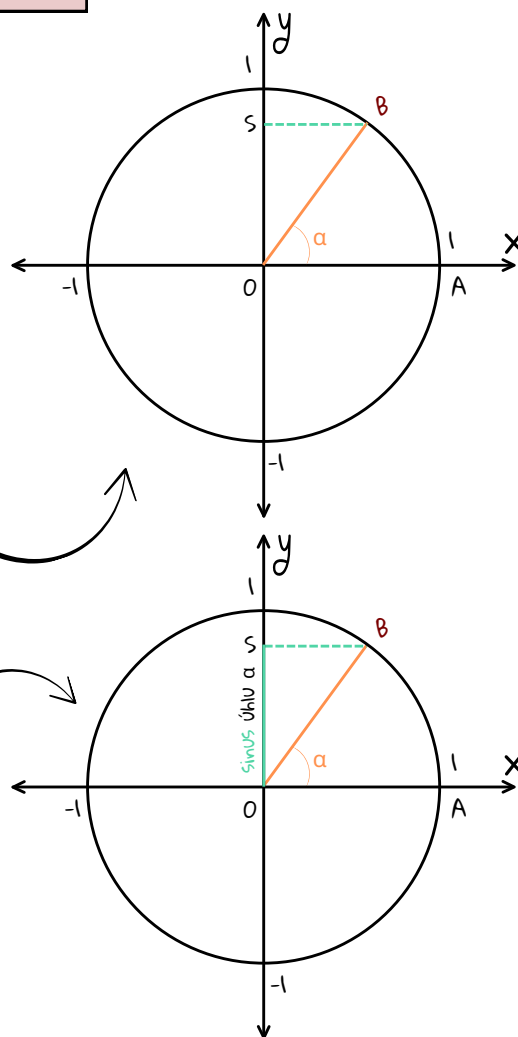


- $-\frac{19\pi}{9}$



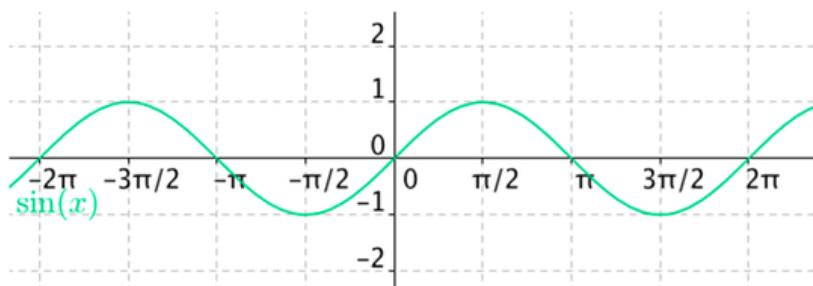
SINUS NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI

- Nejprve na jednotkovou kružnici nanese nějaký úhel
 - Nanesli jsme na kružnici úhel AOB (oranžově) = α .
 - Ramena úhlu protínají jednotkovou kružnici ve dvou bodech: A a B. Důležitý pro nás bude bod B.
 - Z bodu B povedeme přímku rovnoběžnou s osou x (přerušovaná horizontální čára), tak nám tato přímka protne osu y v bodě S.
 - Délka úsečky OS (zelená úsečka) je hodnota sinu úhlu α
 - $\sin x = y\text{-ová souřadnice}$
 - Vyčtením z grafu:
 - $\sin \alpha = \text{-----}$
 - Vypočítáním na kalkulačce:
 - $\sin \alpha = \text{-----}$



Vlastnosti funkce sinus:

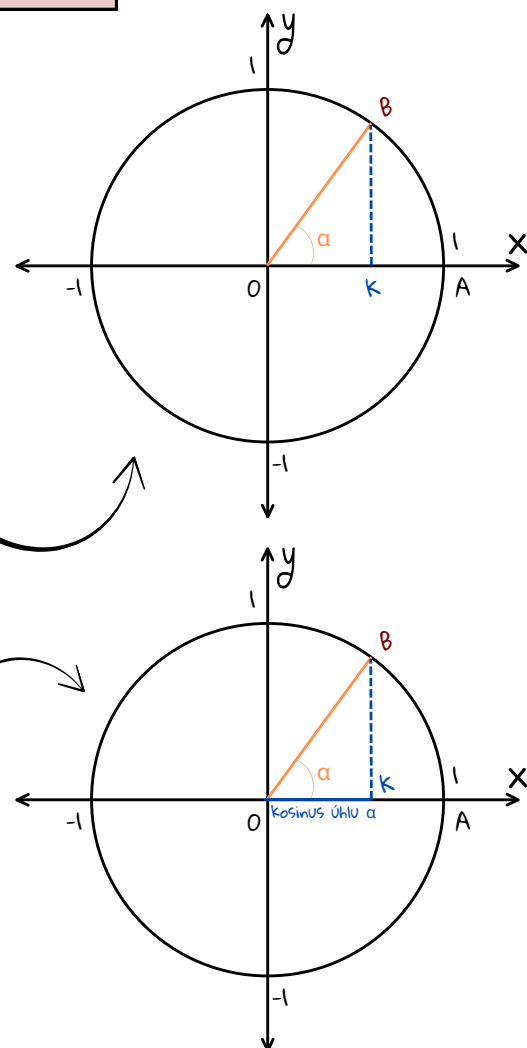
- Grafem funkce sinus:
 - křivka SINUSOIDA



- Periodická funkce, která má nejmenší periodu -----
- Definiční obor je množina -----
- Obor hodnot je interval -----
- Sinus má maximum v nekonečně mnoha bodech
 - Hodnota maxima: -----
- Sinus má minimum v nekonečně mnoha bodech
 - Hodnota minima: -----
- Sinus je lichá a omezená funkce

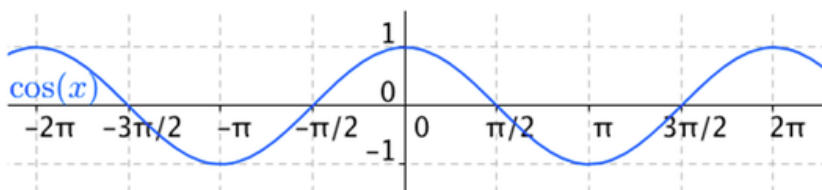
KOSINUS NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI

- Nejprve na jednotkovou kružnici nanese nějaký úhel
 - Nanesli jsme na kružnici úhel AOB (oranžově) = α .
 - Ramena úhlu protínají jednotkovou kružnici ve dvou bodech: A a B. Důležitý pro nás bude opět bod B.
 - Z bodu B povedeme přímku rovnoběžnou s osou y (přerušovaná vertikální čára), tak nám tato přímka protne osu x v bodě K.
 - Délka úsečky OK (modrá úsečka) je hodnota kosinu úhlu α
 - $\cos x = x\text{-ová souřadnice}$
 - Vyčtením z grafu:
 - $\cos \alpha = \text{-----}$
 - Vypočítáním na kalkulačce:
 - $\cos \alpha = \text{-----}$



Vlastnosti funkce kosinus:

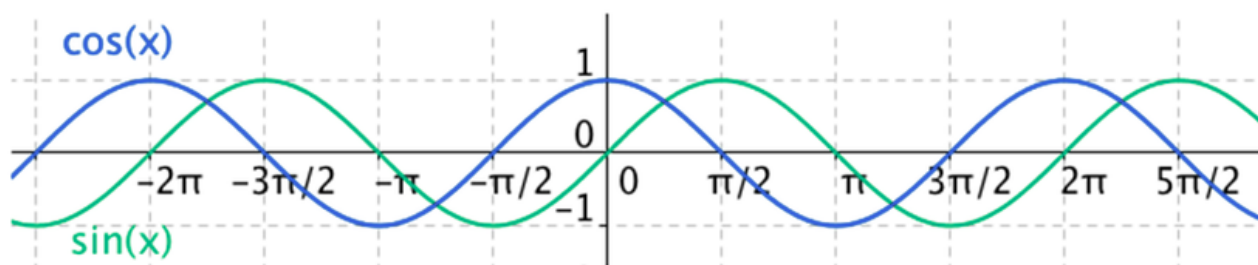
- Grafem funkce sinus:
 - křivka COSINUSOIDA



- Periodická funkce, která má nejmenší periodu -----
- Definiční obor je množina -----
- Obor hodnot je interval -----
- Sinus má maximum v nekonečně mnoha bodech
 - Hodnota maxima: -----
- Sinus má minimum v nekonečně mnoha bodech
 - Hodnota minima: -----
- Sinus je sudá a omezená funkce

Vztahy mezi sinem a kosinem:

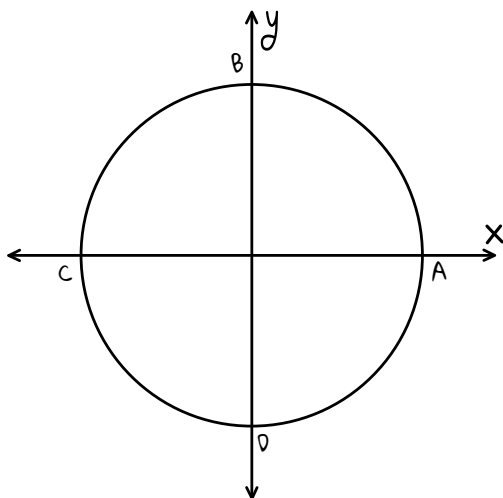
- Grafy sinu a cosinu se moc neliší, jen je jedna trošku posunutá od druhé



gify

Příklady na sinus a kosinus:

- 1) Vyberte ze zadaných úhlů jakou velikost má úhel α a запиšte hodnoty $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$:



úhel	velikost úhlu	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
AOA			
AOB			
AOC			
AOD			
AOA			

2) Zakreslete zadané úhly do jednotkové kružnice a zjistěte, jestli jsou sin a kosin úhlu a větší či menší než nula.

- $\alpha = 140^\circ$

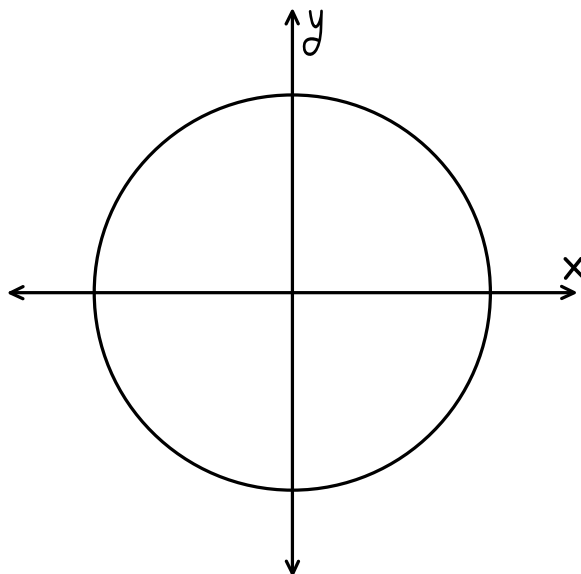
- ☐ $\sin \alpha$ 0

- ☐ $\cos \alpha$ 0

- $\beta = -70^\circ$

- ☐ $\sin \alpha$ 0

- ☐ $\cos \alpha$ 0



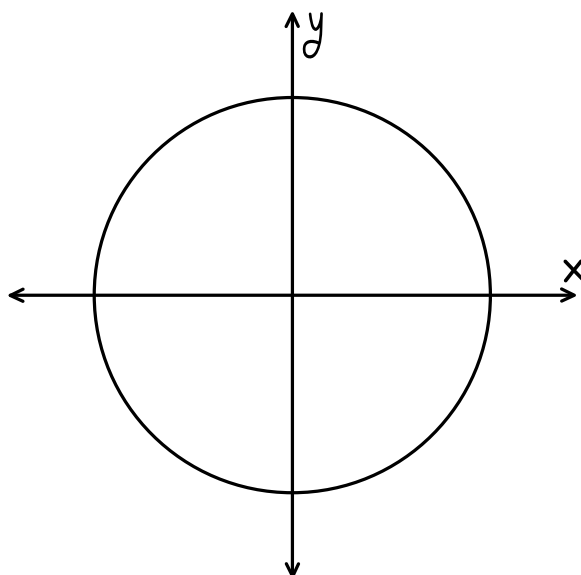
3) Pro dané úhly doplňte znaménka nerovnosti:

- $\alpha = 45^\circ$ a $\beta = \frac{\pi}{3}$

- ☐ α β

- ☐ $\sin \alpha$ $\sin \beta$

- ☐ $\cos \alpha$ $\cos \beta$

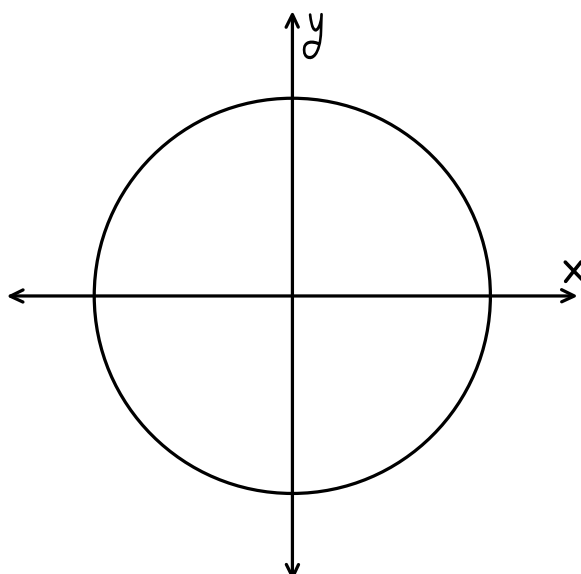


- $\alpha = 165^\circ$ a $\beta = \frac{4\pi}{3}$

- ☐ α β

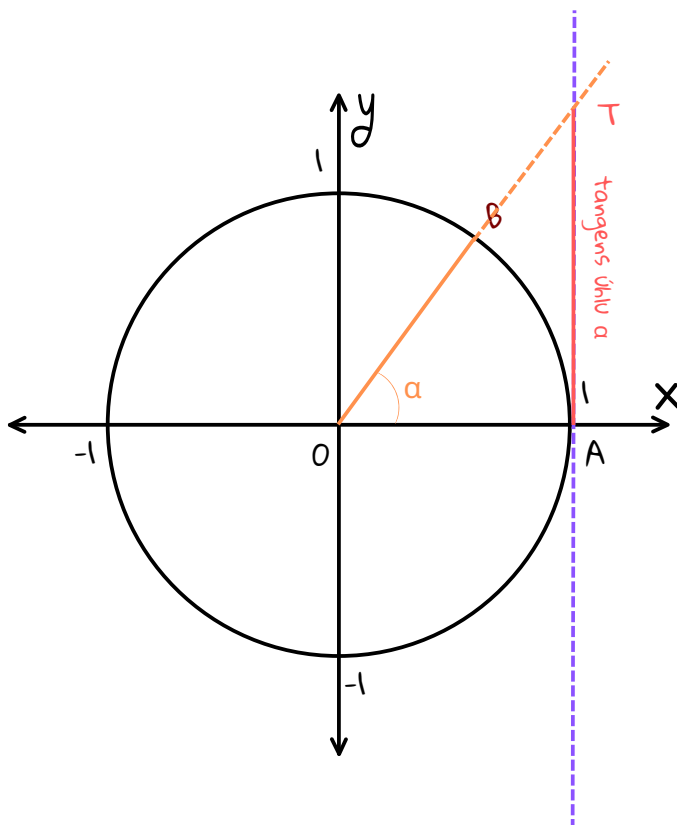
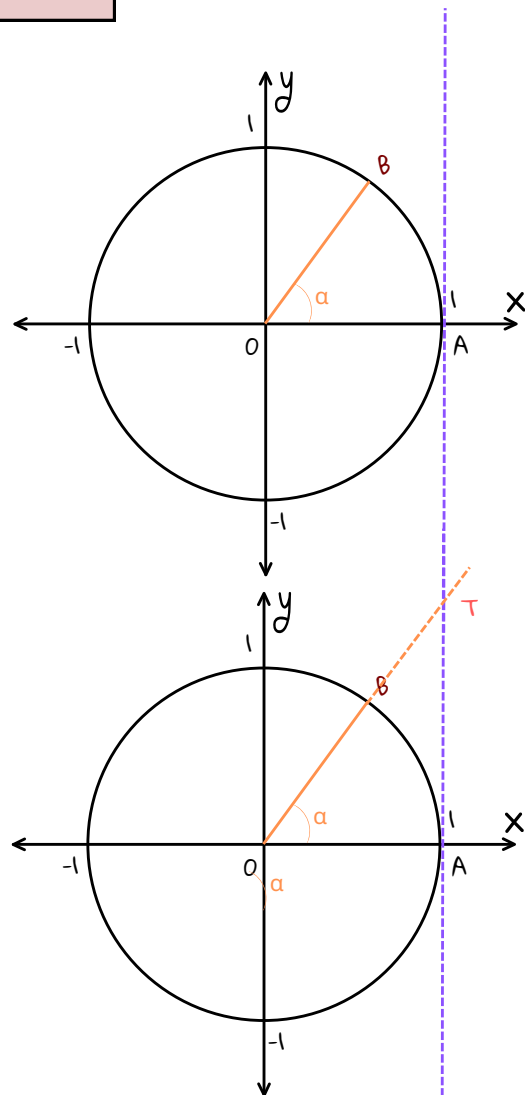
- ☐ $\sin \alpha$ $\sin \beta$

- ☐ $\cos \alpha$ $\cos \beta$



TANGENS NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI

- Nejprve na jednotkovou kružnici nanese nějaký úhel
 - Nanesli jsme na kružnici úhel AOB (oranžově) = α .
 - Ramena úhlu protínají jednotkovou kružnici ve dvou bodech: A a B.
Důležitý pro nás bude opět bod B
 - Nakreslíme fialovou přerušovanou přímku rovnoběžnou s osou y a procházející bodem A [1, 0]
 - Prodloužíme přímku OB tak, aby se dotkla fialové přerušované přímky a vznikl bod T
 - Vzdálenost úsečky AT je pak rovna **tangensu** úhlu α
 - Stačí vzít y-ovou souřadnici bodu T a také získáme **tangens** úhlu α



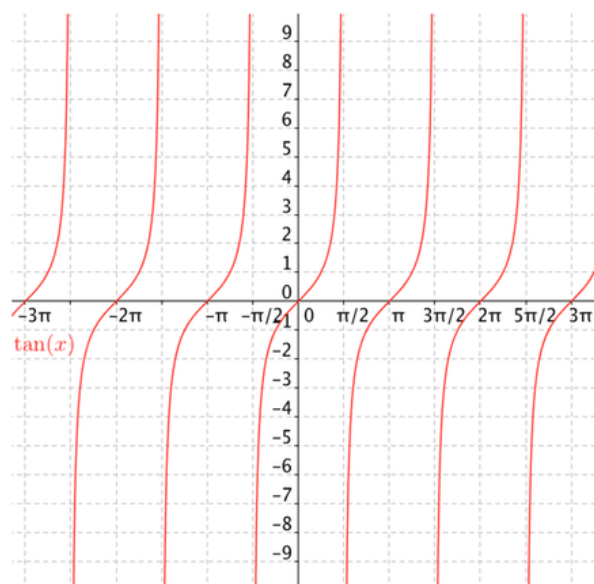
Vlastnosti funkce tangens:

- Grafem funkce sinus:
 - křivka **TANGENTOIDA**

- Perioda je -----
- Definiční obor je množina

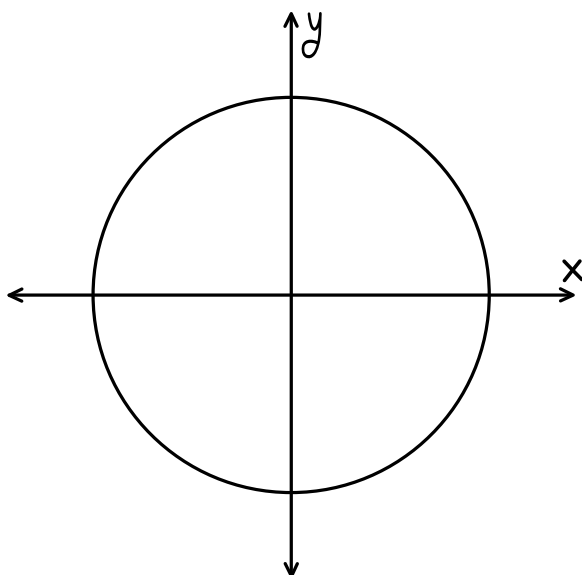
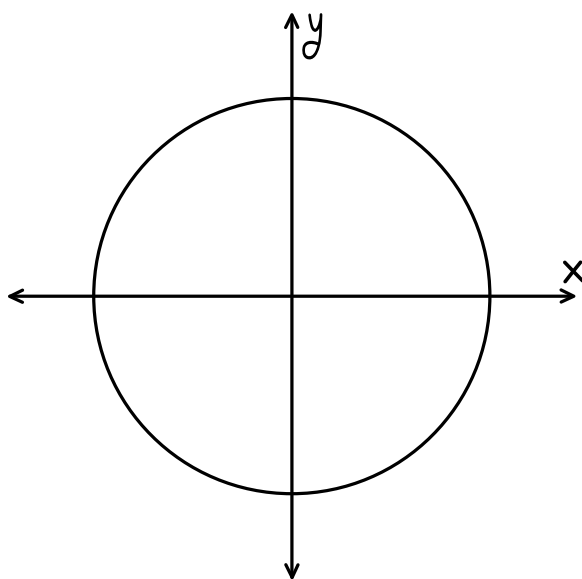
$$D(\tan) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Obor hodnot je -----
- Nemá maximum ani minimum a není omezená
- Tangens je funkce lichá



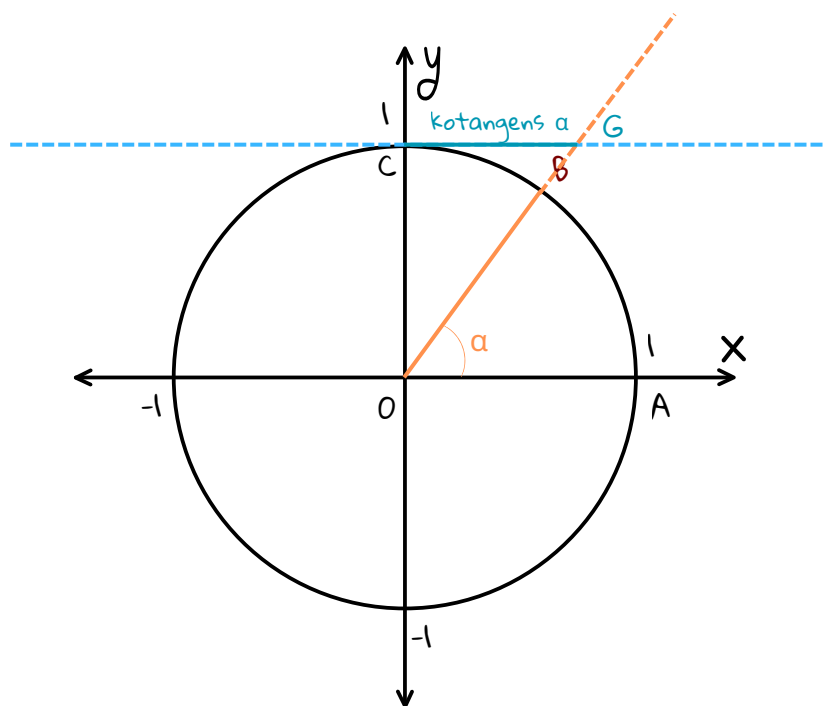
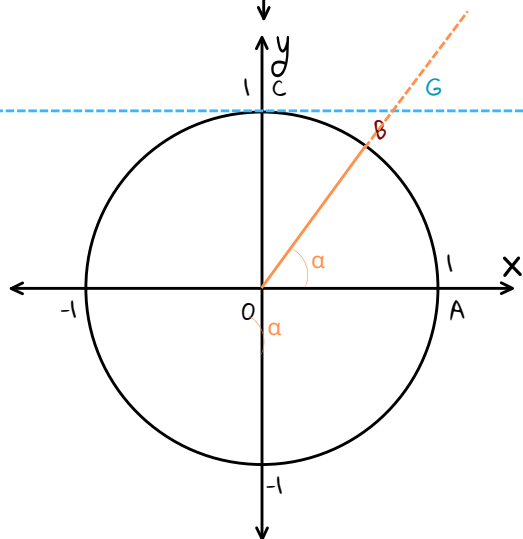
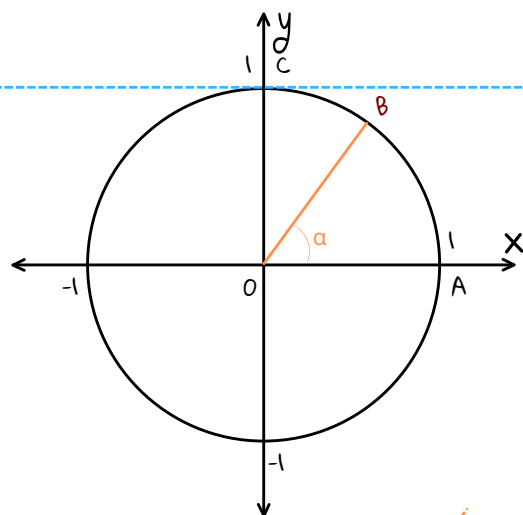
- **Zajímavost:**
 - Pokud je úhel α větší než $90^\circ \rightarrow$

- Pokud je úhel α přesně 90° nebo $270^\circ \rightarrow$



KOTANGENS NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI

- Nejprve na jednotkovou kružnici nanese nějaký úhel
 - Nanesli jsme na kružnici úhel AOB (oranžově) = α .
 - Ramena úhlu protínají jednotkovou kružnici ve dvou bodech: A a B. Důležitý pro nás bude opět **bod B**
 - Nakreslíme modrou přerušovanou přímku rovnoběžnou s osou x a procházející bodem C [0, 1]
 - Prodloužíme přímku OB tak, aby se dotkla modré přerušované přímky a vznikl bod G
 - Vzdálenost úsečky CG je pak rovna **kotangensu úhlu α**
 - Stačí vzít x-ovou souřadnici bodu G a také získáme **kotangens úhlu α**



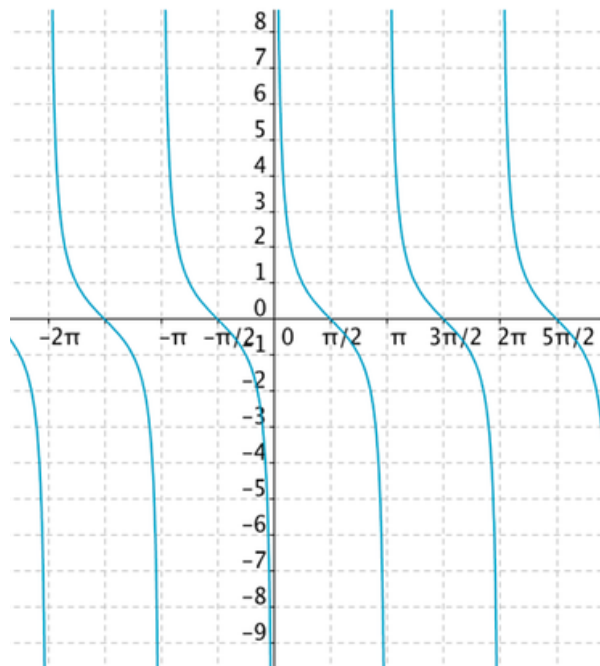
Vlastnosti funkce kotangens:

- Grafem funkce sinus:
 - křivka KOTANGENSOIDA

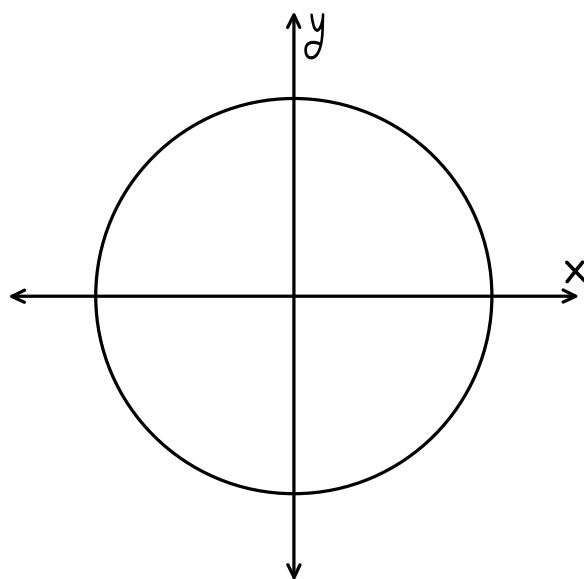
- Perioda je -----
- Definiční obor je množina

$$D(\cot) = \mathbb{R} - \{k\pi\}; \quad k \in \mathbb{Z}$$

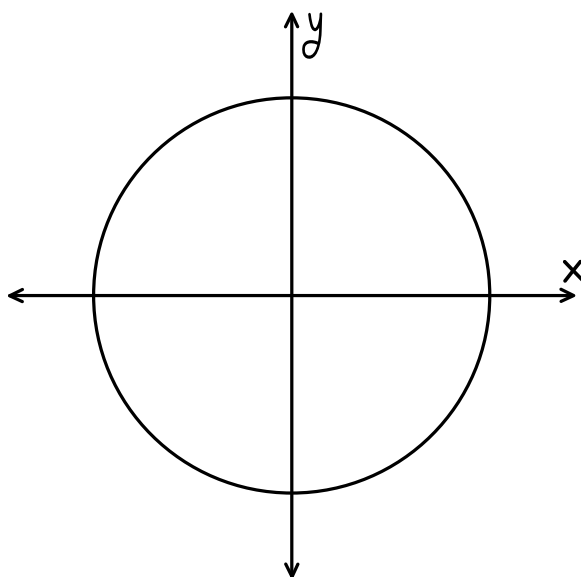
- Obor hodnot je -----
- Nemá maximum ani minimum a není omezená
- Kotangens je funkce lichá



- Zajímavost:
 - Pokud je úhel α větší než $180^\circ \rightarrow$



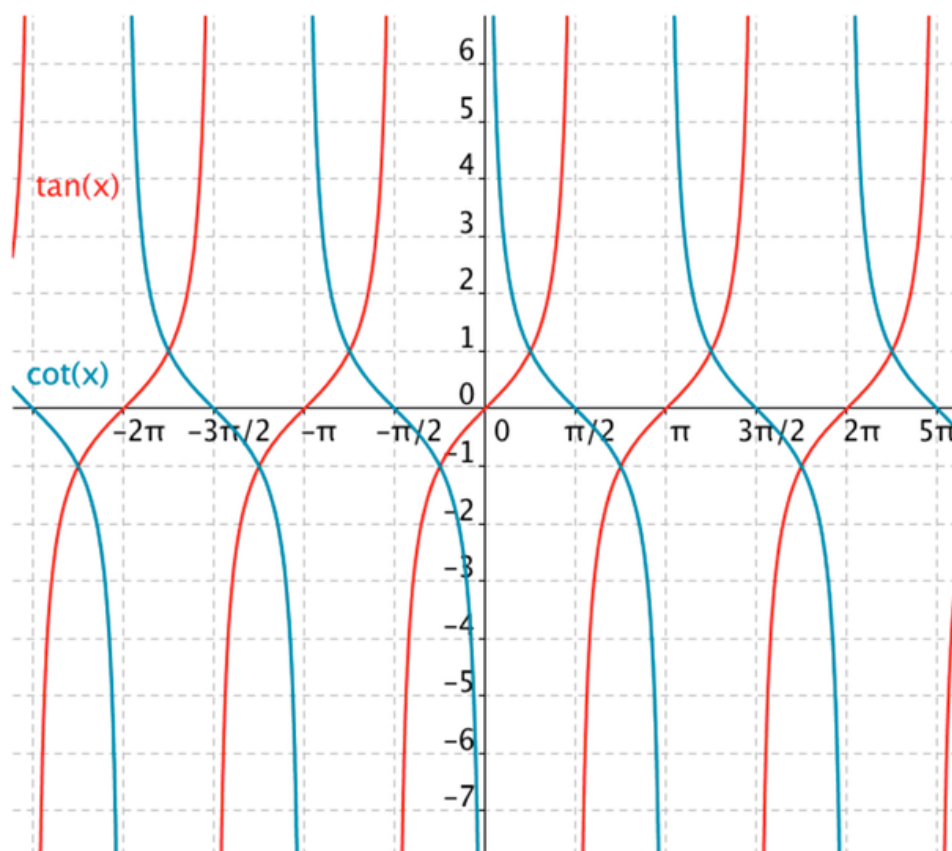
- Pokud je úhel α přesně $180^\circ \rightarrow$



Vztahy mezi tangens a kotangens:

- Grafy jsou si opět podobné, tangens je posunutý o $(-x + \pi/2)$

$$\cot(x) = \tan(-x + \frac{\pi}{2})$$



- Vzorce:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

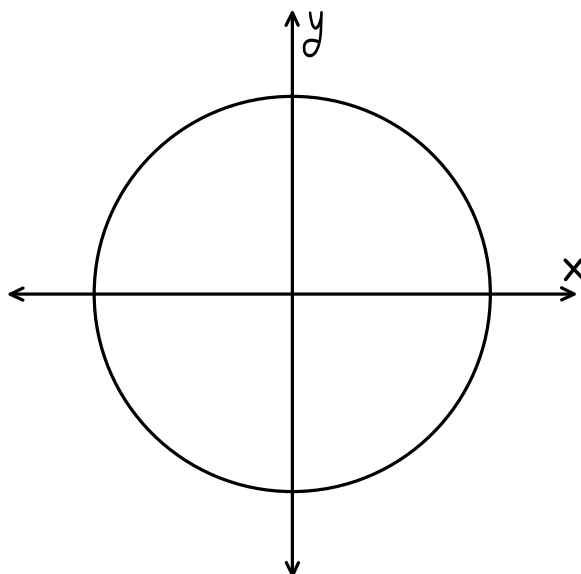


gify

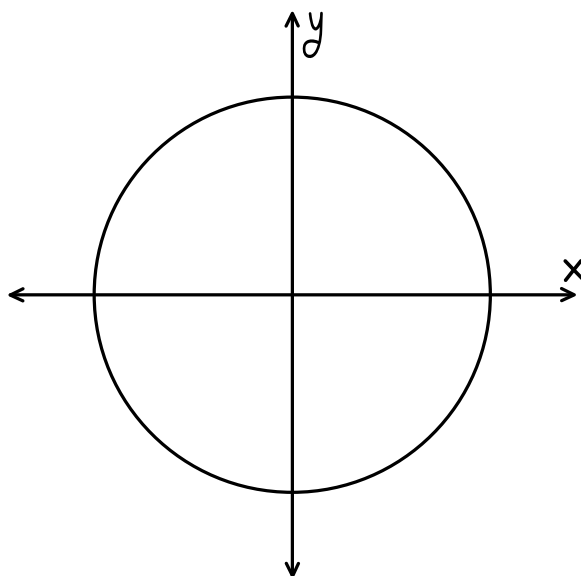
Příklady na všechny goniometrické funkce:

1) Na jednotkové kružnici přibližně vyznačte úhly, pro které platí dané podmínky:

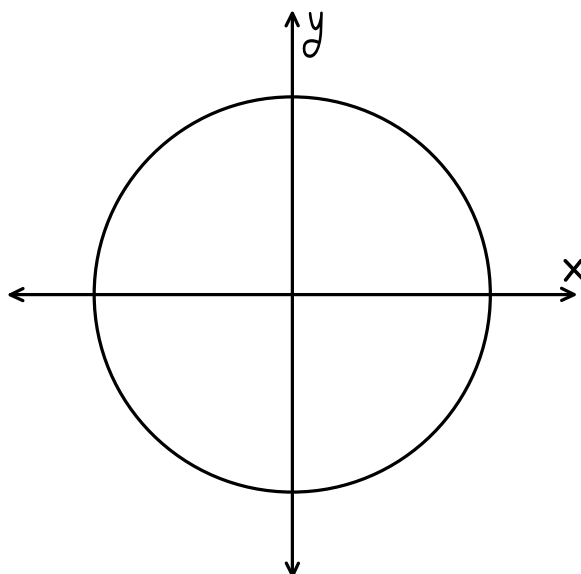
a) $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$ a $\sin \alpha > 0$



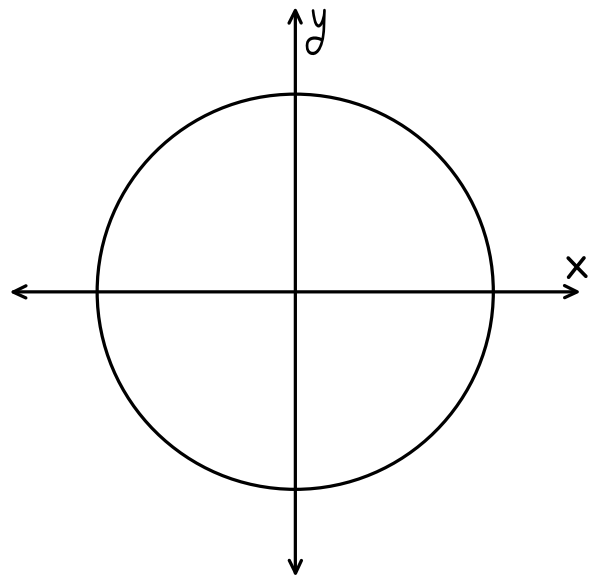
b) $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$ a $\cos \alpha < 0$



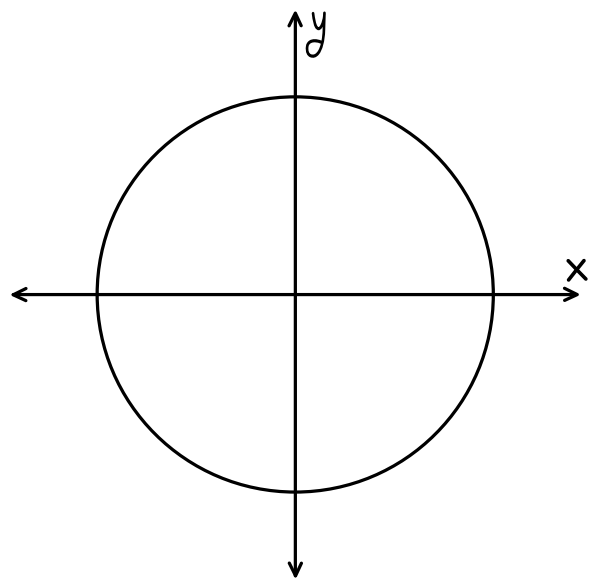
c) $\operatorname{tg} \alpha = 1,5$ a $\cos \alpha < 0$



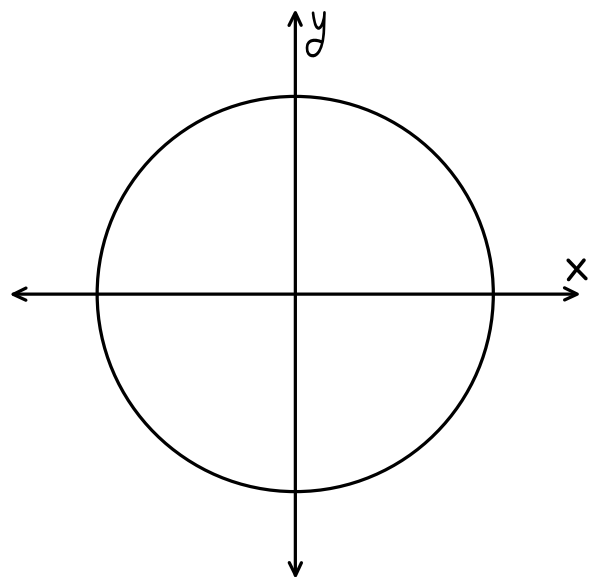
$$d) \operatorname{tg} \alpha = -2 \quad \text{a} \quad \sin \alpha > 0$$



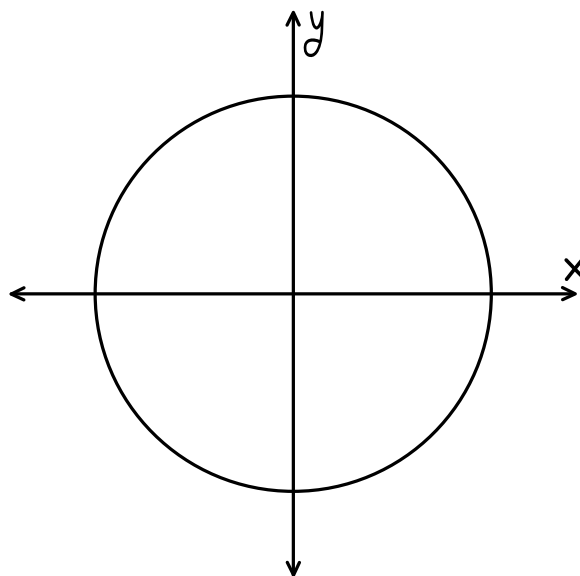
$$e) \operatorname{cotg} \alpha = -0,5 \quad \text{a} \quad \sin \alpha > 0$$



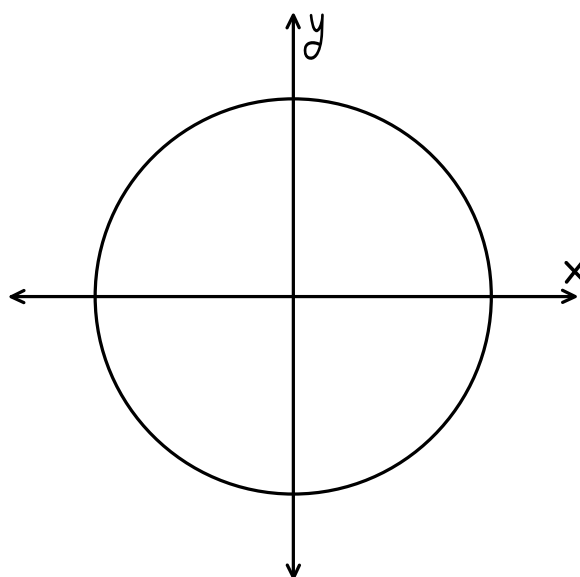
$$f) \operatorname{cotg} \alpha = 1 \quad \text{a} \quad \sin \alpha < 0$$



g) $\cotg \alpha = 1$ a $\tg \alpha = -1$

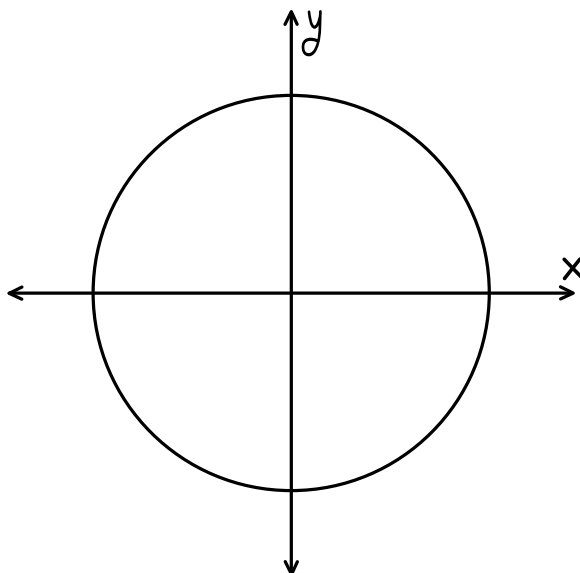


h) $\cotg \alpha = -2$ a $\tg \alpha > 0$



2) K jednotlivým úhlům najděte další tak, aby platila rovnost:

- $\tg 0^\circ =$
- $\tg 100^\circ =$
- $\tg \frac{\pi}{4} =$
- $\tg \frac{4\pi}{3} =$
- $\tg 315^\circ =$
- $\cotg 100^\circ =$
- $\cotg \frac{3\pi}{2} =$

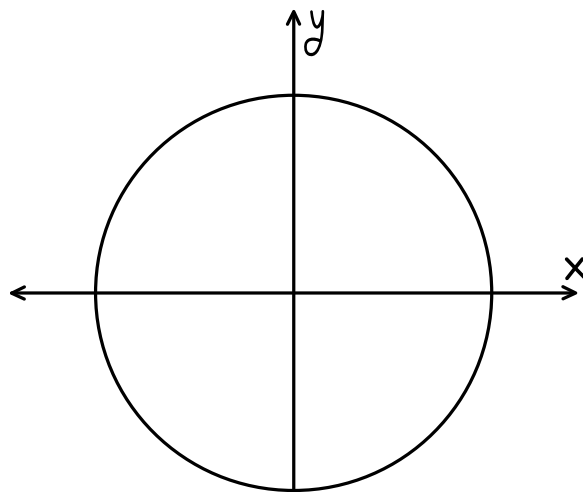


GONIOMETRICKÉ ROVNICE

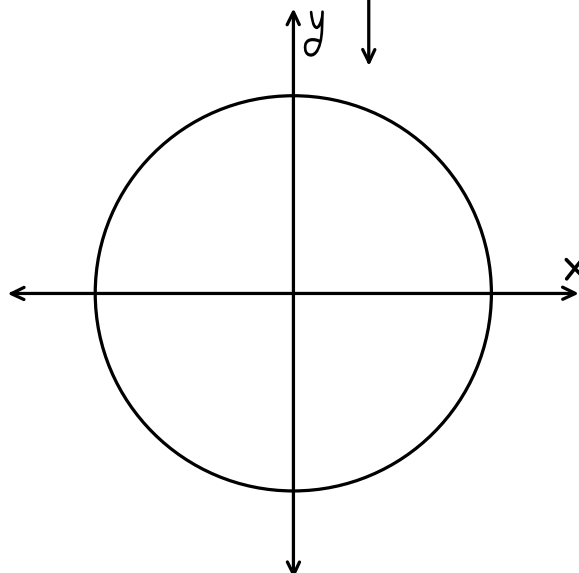
Příklady na goniometrické rovnice:

1) Řešte rovnice a výsledky запиšte ve °, popřípadě 'a '':

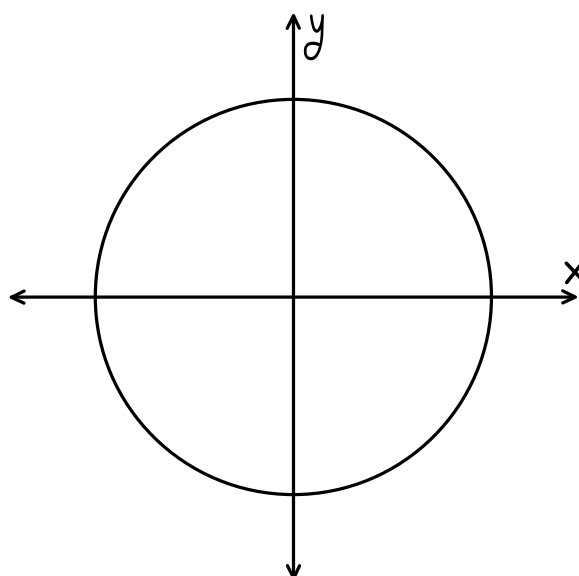
- $\sin x = 0,5$



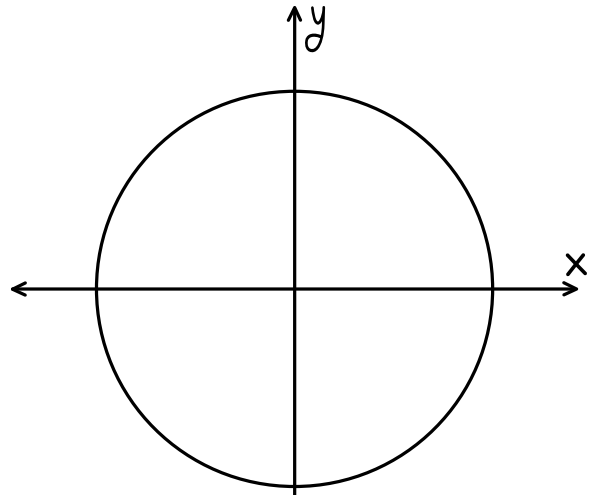
- $\cos x = -0,5$



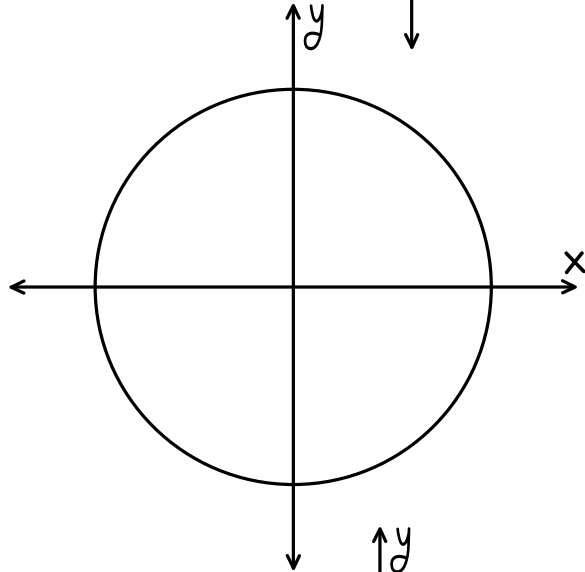
- $2 \cdot \cos x = \sqrt{2}$



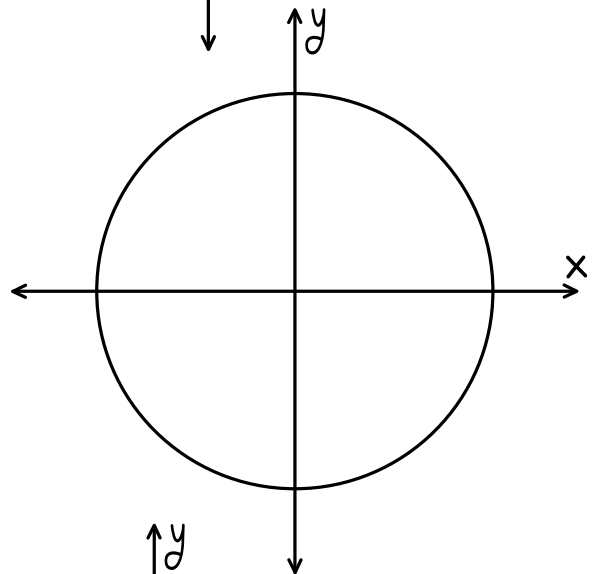
- $-\operatorname{tg} x = 1$



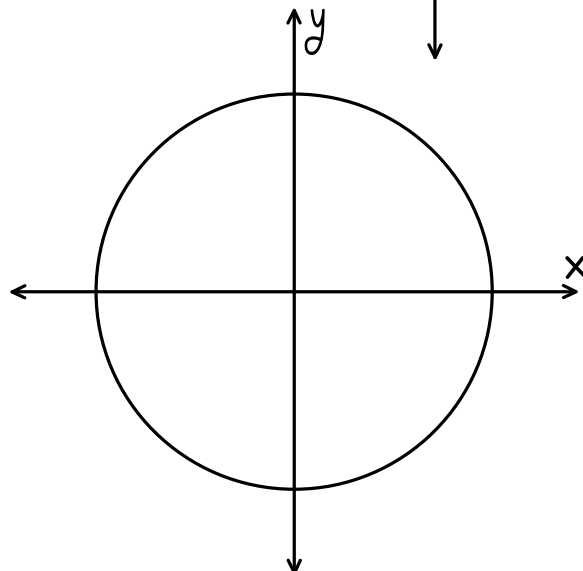
- $2 \cdot \sin x = 0$



- $\cos x = 0,75$



- $\sin x = \frac{1}{3}$



Trigonometrie

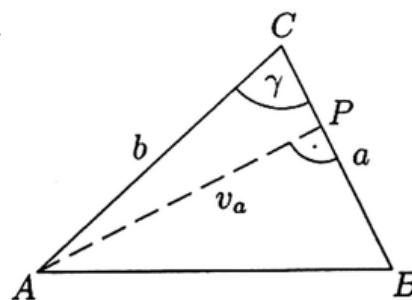
= měření trojúhelníku

- nyní se budeme řešit trojúhelník obecný (ne už pravoúhlý)

Vzorce na obsah trojúhelníku:

- Trojúhelník, kde úhel gama je **OSTRÝ**:

$$S = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

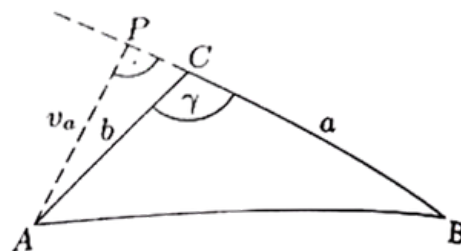


- Trojúhelník, kde úhel gama je **90°**:

$$S = \frac{1}{2}ab, \quad S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

- Trojúhelník, kde úhel gama je **TUPÝ**:

$$S = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$



SINOVÁ VĚTA

Používá se pro výpočet prvků trojúhelníku, jestliže známe délky dvou stran a úhel proti jedné z nich

- Ze vzorců viz výše lze odvodit:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

KOSINOVÁ VĚTA

Používá se, když známe pouze délky dvou stran a úhlu jimi sevřeného

- Kosinova věta
 - Obdoba Pythagorovy věty
 - V každém trojúhelníku pro délku c jeho libovolné strany platí:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

Příklady na trigonometrii:

1) V $\triangle ABC$ je dáno: $\alpha = 65^\circ$, $\beta = 25^\circ$ a strana $b = 1,8$ cm. Určete velikost strany a a c .

2) V $\triangle ABC$ je dáno: $c = 8 \text{ cm}$, $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 20^\circ$. Určete zbývající prvky trojúhelníku.

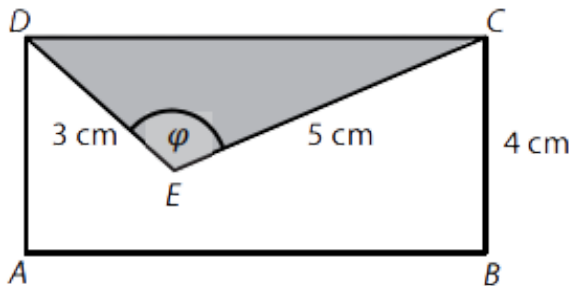
3) V $\triangle ABC$ je dáno: $a = 2 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$, $\gamma = 77^\circ$. Určete zbývající prvky trojúhelníku.

4) Vypočítejte obvod trojúhelníku ABC, když strana $a = 5,4$ cm, strana $c = 13$ cm a $\beta = 70^\circ$.

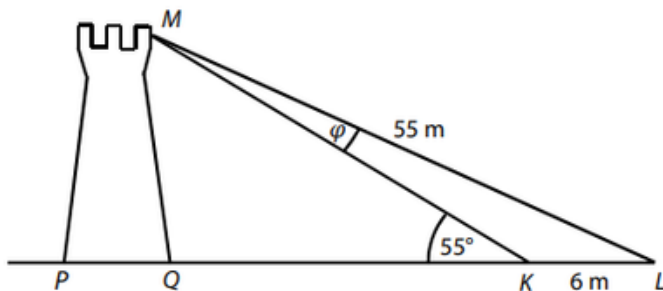
5) V $\triangle ABC$ je dáno: $b = 5$ cm, $c = 4$ cm, $\alpha = 40^\circ$. Určete zbývající prvky trojúhelníku.

Slovní úlohy na trigonometrii:

1) V obdélníku o obsahu 28 cm^2 je umístěn trojúhelník CDE. Oba obrazce mají společnou stranu CD. V obrázku jsou uvedeny parametry stran. Jak velký je úhel γ ?

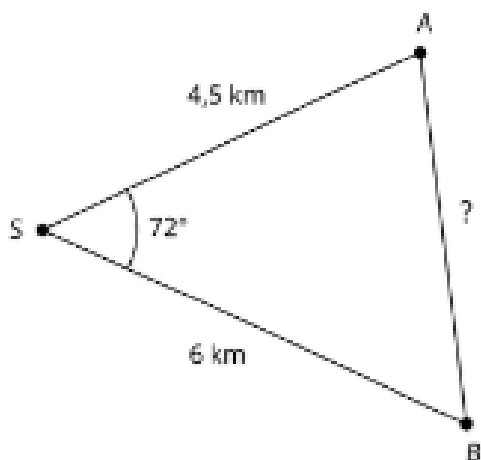


2) Z místa pozorování M je možné zaměřit body K a L v zorném úhlu γ . Jaký je úhel γ ? Parametry jsou zakresleny v obrázku:

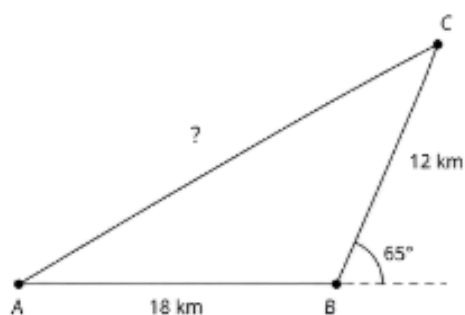


Slovní úlohy na trigonometrii:

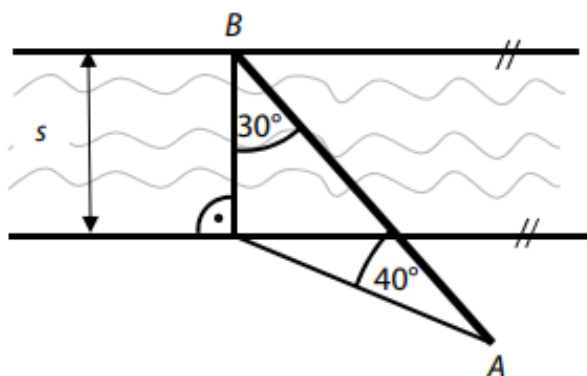
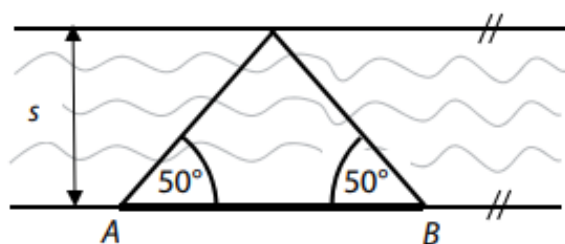
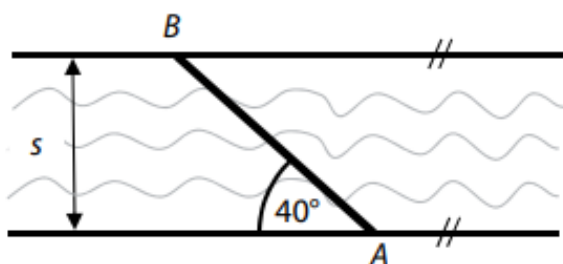
- 1) Dvě turistické cesty vycházejí z jednoho místa pod úhlem 72° . Jeden turista ujede po první cestě 4,5 km, druhý po druhé 6 km. Jak daleko jsou od sebe?



- 2) Loď vypluje z přístavu A a ujede 18 km do bodu B. Poté změní směr o 65° a ujede dalších 12 km do bodu C. Urči přímou vzdálenost mezi A a C.



3) V každé zobrazené situaci je šířka řeky označena symbolem s a vzdálenost mezi body A a B je vždy 50 m. Jaká je šířka řeky ve všech 3 případech?



Příprava na III. čtvrtletní práci A

1) Na jednotkové kružnici vyznač úhel 210° a převed' na obloukovou míru. U tohoto úhlu vyznač na jednotkové kružnici hodnoty $\sin$, $\cos$, tg a cotg .

- Výsledky zapiš do jednotkové kružnice a do rámečků:

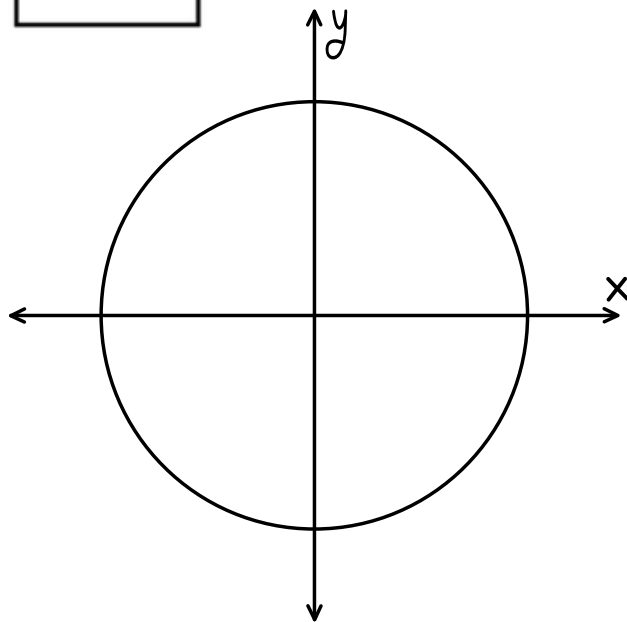
○ Zadaný úhel α v obloukové míře:

○ $\sin \alpha$

○ $\cos \alpha$

○ $\operatorname{tg} \alpha$

○ $\operatorname{cotg} \alpha$

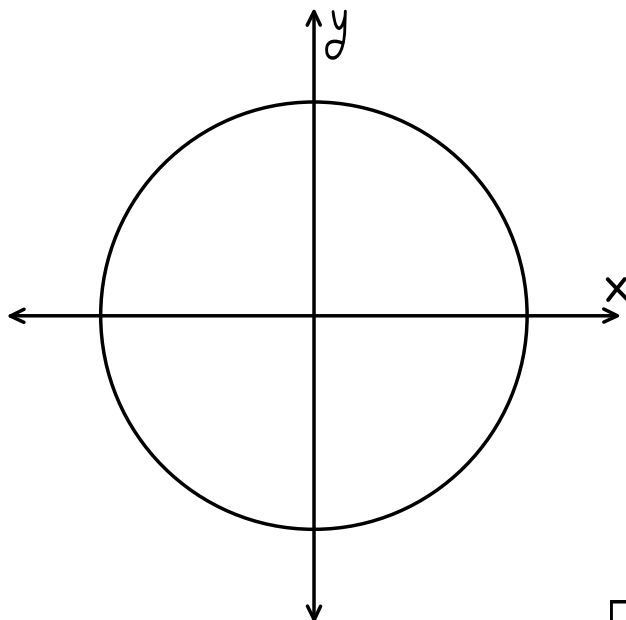


2) Na jednotkové kružnici přibližně vyznačte úhel, pro který platí daná kritéria: $\operatorname{tg} \alpha = 1$ a přitom $\sin \alpha < 0$

- O jaký úhel se jedná? (Opět zapište v míře stupňové i obloukové)

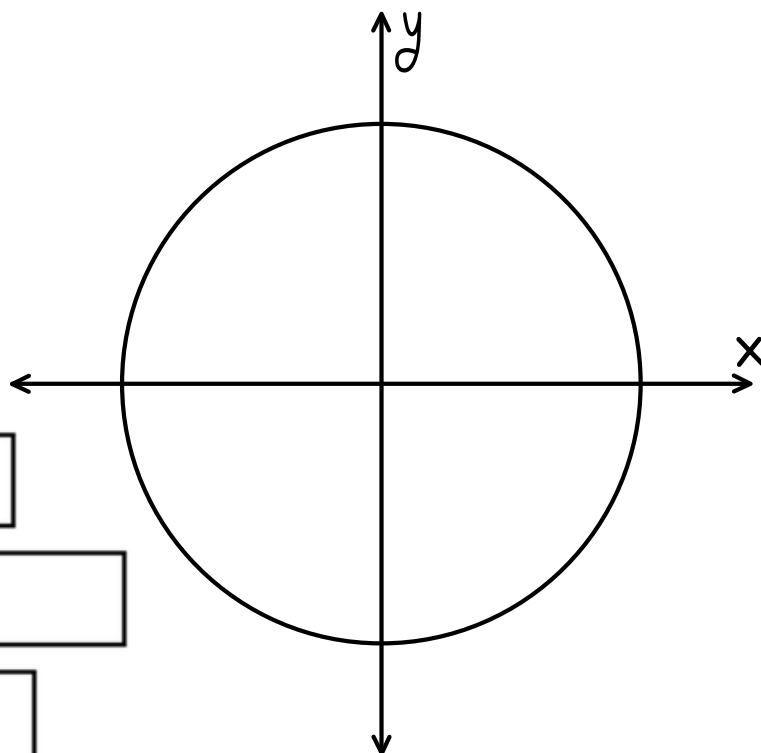
○ úhel α ve stupních:

○ úhel α v obloukové míře:



3) Vypočítejte goniometrickou rovnici a zjistěte, o jaký úhel se jedná. Zapište ho do jednotkové kružnice a najděte všechny úhly, pro které má rovnice řešení. Tyto úhly ještě převeďte na obloukovou míru.

Rovnice: $\frac{b \cdot \cos \alpha}{\sqrt{9}} = -1$



• 1. Úhel α ve stupních:

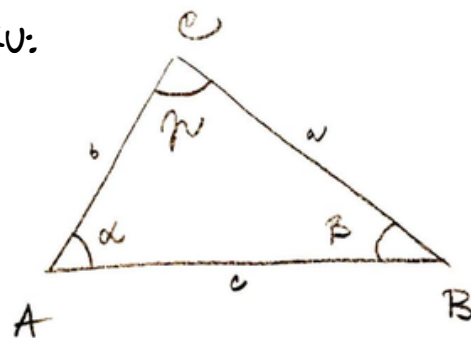
• 1. Úhel α v obloukové míře:

• 2. Úhel α ve stupních:

• 2. Úhel α v obloukové míře:

4) Dopačítejte všechny prvky obecného trojúhelníku:

- $a = 20$ cm, $b = 30$ cm a $\gamma = 110^\circ$



Příprava na III. čtvrtletní práci B

1) Na jednotkové kružnici vyznač úhel 120° a převed' na obloukovou míru. U tohoto úhlu vyznač na jednotkové kružnici hodnoty $\sin$, $\cos$, tg a cotg .

- Výsledky zapiš do jednotkové kružnice a do rámečků:

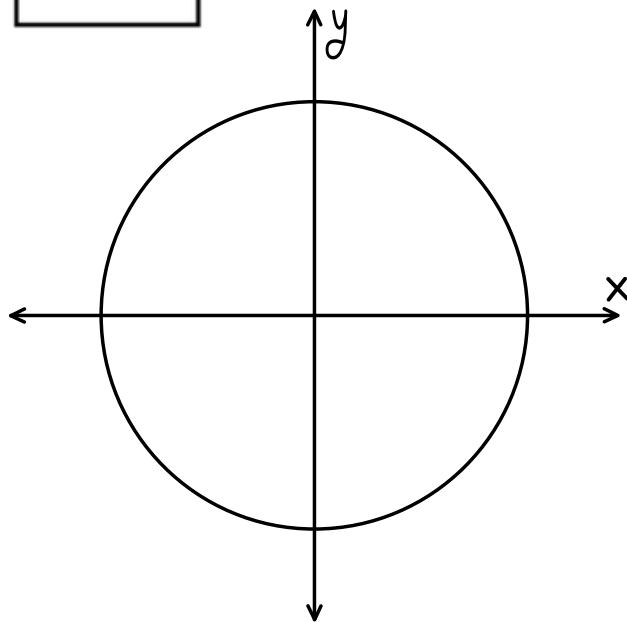
○ Zadaný úhel α v obloukové míře:

○ $\sin \alpha$

○ $\cos \alpha$

○ $\operatorname{tg} \alpha$

○ $\operatorname{cotg} \alpha$

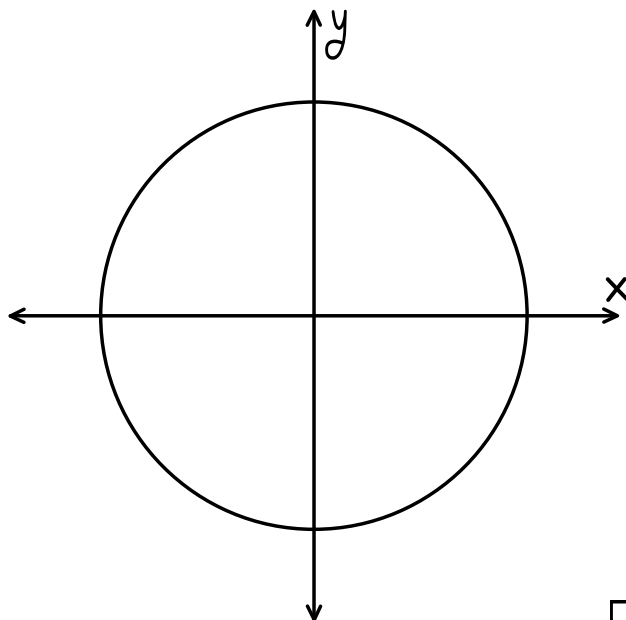


2) Na jednotkové kružnici přibližně vyznačte úhel, pro který platí daná kritéria: $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$ a přitom $\cos \alpha < 0$

- O jaký úhel se jedná? (Opět zapište v míře stupňové i obloukové)

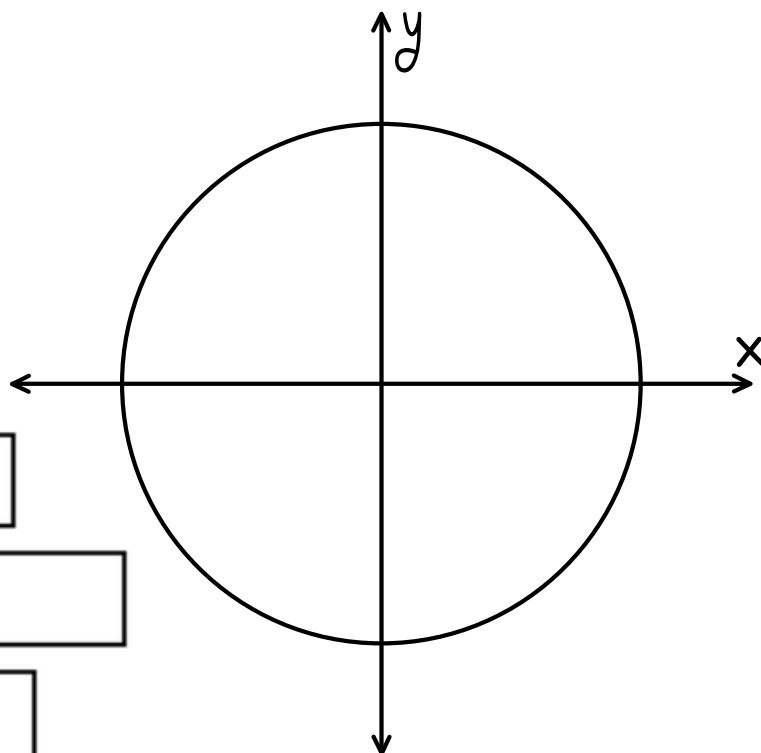
○ úhel α ve stupních:

○ úhel α v obloukové míře:



3) Vypočítejte goniometrickou rovnici a zjistěte, o jaký úhel se jedná. Zapište ho do jednotkové kružnice a najděte všechny úhly, pro které má rovnice řešení. Tyto úhly ještě převeďte na obloukovou míru.

Rovnice: $\frac{9 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{3}} = 3$



• 1. Úhel α ve stupních:

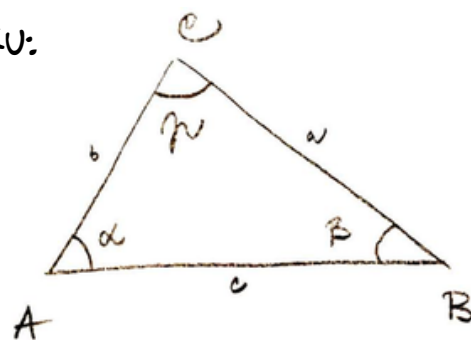
• 1. Úhel α v obloukové míře:

• 2. Úhel α ve stupních:

• 2. Úhel α v obloukové míře:

4) Dopačítejte všechny prvky obecného trojúhelníku:

- $a = 15 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$ a $\gamma = 135^\circ$



Posloupnosti

= uspořádané sady objektů (často čísel), kde záleží na pořadí

- př.: Utvořte posloupnost všech sudých přirozených čísel podle velikosti:

○ -----

- Každá posloupnost je určena pravidlem, které každému přirozenému číslu přiřazuje právě jedno číslo reálné

○ Číslo přiřazené k číslu 1 = první člen

○ Číslo přiřazené k číslu 2 = druhý člen,...

■ Příklad: přiřazujeme každému $n \in \mathbb{N}$ číslo n^2 :

• -----

- Označení: (a_n)

○ čteme jako

■ a_n : posloupnost s n -tým členem

■ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$: posloupnost s n -tým členem a_n , pro n od jedné do nekonečna

Zápis posloupností:



VZORCEM PRO N-TÝ ČLEN

- Ihned dokážu spočítat libovolný člen n
- Př: $(2n - 1)_{n=1}^{\infty}$:

REKURENTNĚ

- Počítám druhý člen za pomoci toho prvního
 - Potřebuji znát hodnoty prvního členu
- Počítám třetí člen pomocí dvou předešlých

$$(b_n)_{n=1}^{\infty} \quad b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$$

$$(c_n)_{n=1}^{\infty} \quad c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$$

- Př. $b_{n+1} = 2b_n - 4$

Příklady na vzorec pro n-tý člen:

1) Napište prvních 5 členů posloupností:

- $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

- $a_n = 1 - 2n$

- $a_n = (-1)^n$

- $a_n = n$

- $a_n = (10n + 1)^2$

- $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$

- $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 1$

Příklady na rekurentní vzorec:

1) Určete prvních 6 členů posloupnosti:

- $a_1 = 1, a_{n+1} = 5 - a_n$

- $a_1 = 8, a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$

- $a_1 = -1, a_2 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n$

- $a_1 = 2, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1}^2 - a_n^2$

ARITMETMETICKÁ POSLOUPNOST

- Posloupnost (a_n) , kde existuje číslo d tak, že pro všechna přirozená čísla n platí: $a_{n+1} = a_n + d$
 - d = difference aritmetické posloupnosti
 - Př. 1, 2, 3, 4, 5, 6
 - Vždycky přičtu stejné číslo ($d = 1$)
 - Př. $(2n - 7)$ od jedné do nekonečna
 - Zkusíme pár členů vypsát, abych zjistila, jestli je to AP
 - $a_1 = -5, a_2 = -3, a_3 = -1, a_4 = 1, a_5 = 3$
 - Difference je 2 $\rightarrow$ ano, je aritmetická

Vzorce AP:

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

Příklady na aritmetickou posloupnost:

1) Určete prvních 10 členů aritmetické posloupnosti:

- $a_1 = -1, d = 2$

- $a_1 = 3, d = -\frac{1}{2}$

- $a_1 = -2, d = 0,4$

- $a_1 = 0, d = -1$

2) Určete, zda je posloupnost aritmetická:

- $a_n = 1n + 201$

- $a_n = 1n - 201$

- $a_n = \frac{1}{n}$

- $a_1 = \log 10^n$

3) Určete 5-tý člen aritmetické posloupnosti, jeli:

- $a_1 = 3, d = 4$

- $a_1 = -1, d = -2$

- $a_1 = 9, d = 7$

- $a_1 = 10, d = -3$

4) V aritmetické posloupnosti určete první člen a d:

- $a_7 = 5, a_{12} = 15$

- $a_6 = -3, a_{15} = -8$

Součet prvních n-členů aritmetické posloupnosti:

VZOREC:
$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[a_1 + (a_1 + (n-1)d)]$$

Příklady na součet prvních n-členů:

1) Určete diferenci AP, je-li dáno:

- $a_1 = 2, s_{10} = 245$

- $a_1 = 5, a_n = 23, s_n = 392$

- $a_1 = \frac{11}{5}, s_6 = 48$

2) Určete součet s_n prvních n členů posloupnosti:

- $2n - 3$

- $a_1 = 0, a_{11} = 5$

- $a_1 = 14, d = -3, a_n = -1$

3) Turista ujde první den 40 km, každý další den o 3 km méně než den předcházející. Určete, kolik km ujde za týden.

GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

- Posloupnost (a_n) , kde existuje číslo q tak, že pro všechna přirozená čísla n platí: $a_{n+1} = a_n \cdot q$
 - q = kvocient geometrické posloupnosti
 - Př. $1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8, 16, \dots$
 - Vždycky vynásobím stejným číslem ($q = 2$)

Vzorce GP:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Příklady na geometrickou posloupnost:

1) Určete prvních 5 členů geometrické posloupnosti:

- $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 2$

- $a_1 = 3, a_2 = -2$

- $a_1 = 1, a_2 = -\frac{1}{2}$

- $a_1 = -2, q = 1$

- $a_1 = 2, q = -1$

- $a_1 = -1, q = -\frac{1}{2}$

- $a_1 = 1, q = \frac{1}{10}$

Součet prvních n -členů geometrické posloupnosti:

VZOREC: $s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Příklady na součet prvních n -členů:

1) Určete součet prvních n členů:

- $a_1 = 2, q = -2, n = 5$

- $a_1 = 16, q = \frac{1}{2}, n = 6$

- $a_1 = -5, q = 2, n = 10$

- $a_1 = -5, q = -1, n = 10$

Příprava na IV. čtvrtletní práci A

1) Vypočítejte prvních 5 členů posloupnosti zadané vzorcem pro n -tý člen: $a_n = (2n + 1)^2$ a určete, jestli se jedná o geometrickou nebo aritmetickou posloupnost.

2) Vypočítejte prvních 7 členů posloupnosti zadané rekurentním vzorcem a určete, jestli se jedná o aritmetickou nebo geometrickou posloupnost: $a_1 = 3, a_2 = 1, a_{n+2} = 2 \cdot a_{n+1} + a_n$

3) Zjistěte diferenci d a prvních 6 členů aritmetické posloupnosti, pokud znáte: $a_1 = -3, a_2 = 3$ a zjistěte, jakou hodnotu bude mít 90. člen této posloupnosti.

- 4) Simona má challenge. Každý den se musí učit na maturitu. Začne na 6 minutách. Každý další den musí prodloužit dobu o 4 minuty. Kolik minut se bude učit 20. den challenge? Kolik hodin se dohromady těchto 20 dnů učila?

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \quad s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

- 5) Vypočítejte kvocient q a prvních 6 členů geometrické posloupnosti, když znáte: $a_1 = 5$, $a_2 = -1$

- 6) Chceme začít šetřit. Jelikož je vysoká inflace, chceme každý další rok ušetřit 1,5x toho, co minulý rok. Tento rok jsme ušetřili 25 000,-. Určete, kolik máme ušetřit 5. rok? A kolik peněz budeme mít na účtu za těchto 5 let?

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Příprava na IV. čtvrtletní práci B

1) Vypočítejte prvních 5 členů posloupnosti zadané vzorcem pro n -tý člen:

$$a_n = 2 \frac{1}{n} \text{ a určete, jestli se jedná o AP nebo GP.}$$

2) Vypočítejte prvních 7 členů posloupnosti zadané rekurentním vzorcem a určete, jestli se jedná o aritmetickou nebo geometrickou posloupnost: $a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} = 2 a_{n+1} - a_n - 2$

3) Zjistěte diferenci d a prvních 6 členů aritmetické posloupnosti, pokud znáte: $a_1 = -1, a_2 = 1$ a zjistěte, jakou hodnotu bude mít 225. člen této posloupnosti.

- 4) Na maturitu je třeba mít přečtených hodně knih. Laura si řekla, že začne s 10 stranami s tím, že každý den přečte o 7 stran víc. Kolik stran knih přečte Laura 30. den? Kolik knih přečetla ze těch 30 dní, když v průměru mají její knihy 209 stran?

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \quad s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

- 5) Vypočítejte kvocient q a prvních 6 členů geometrické posloupnosti,

když znáte: $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = 2$

- 6) Lyžák v roce 1990 stál 800,-. Od té doby se cena zvyšovala každý rok 1,05 krát. Kolik mě bude stát lyžák v roce 2025? Kolik mě stál lyžařský výcvik za celých 35 let, když jako učitel na něj jezdím každoročně?

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

• Text:

- Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU. 3. díl. Praha: Prometheus, 2022. ISBN 978-80-7196-519-0.
- CALDA, Emil. Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU: díl 2. 1997. 191 s. 1996. ISBN 978-80-7196-057-7.
- VONDRA, Jan; GAZÁRKOVÁ, Dana; MELICHAROVÁ, Stanislava; VOKŘÍNEK, René a KVĚTOŇOVÁ, Martina. Matematika pro střední školy. 3. díl, Planimetrie. Brno: Didaktis, 2013-2020. ISBN 978-80-7358-330-9.
- KRÁLOVÁ, Magda a NAVRÁTIL, Milan. Matematika pro střední školy. 4. díl, Funkce I. Brno: Didaktis, [2020]-. ISBN 978-80-7358-331-6.
- KODEJŠKA, Čeněk a ORT, Jiří. Matematika pro střední školy. 5. díl, Funkce II. Brno: Didaktis, [2020]-. ISBN 978-80-7358-332-3.
- VONDRA, Jan; MRÁZEK, Jakub a ŠUBRTOVÁ, Ivana. Matematika pro střední školy: Pracovní sešit. 2021. ISBN 978-80-7358-358-3.
- Příklady z didaktických testů z maturity z matematiky na adrese: <https://maturita.cermat.cz/menu/testy-a-zadani-z-predchozich-obdobim/matematika/testy-a-zadani-matematika>

• Obrázky:

- [Grafická stránka]. In: canva.com [online]. Dostupné z: <https://canva.com>